

ЕНЕРГЕТИЧНІ СИСТЕМИ ТА КОМПЛЕКСИ ENERGY SYSTEMS AND COMPLEXES

УДК 621.311.153.2.001.24

О.И. Александров, канд. техн. наук, доц., ORCID 0000-0002-5608-8131

Белорусский государственный технологический университет

Д.О. Иванько, канд. техн. наук, доц. ORCID 0000-0002-4348-6624

Норвежский университет науки і техніки

Т.Е. Жуковская, аспирант,

Белорусский национальный технический университет

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ КАТАСТРОФ ДЛЯ ОЦЕНКИ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕЖИМА ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

При вариации режимных параметров электроэнергетическая система (ЭЭС) может переходить из одного равновесного состояния в другое. Исследование нестационарных режимов сложной ЭЭС сводится к решению систем уравнений переходных процессов. Вариация активных или пассивных режимных параметров энергосистемы в момент возникновения различных нестационарных процессов зависит от динамики процессов в рассматриваемой системе и ведет к изменению равновесных состояний самой энергосистемы. При этом вызывает определенный интерес в изучении плавного перехода количественных величин в качественное изменение поведения системы. В статье сформулирован подход и аналитический метод, позволяющий выполнить оценку активных параметров, опасных по условию существования режимов в сложной ЭЭС. Рассматриваются области устойчивости ЭЭС, которые отражают состояние энергетического баланса, определяемого многообразием скачкообразных изменений (бифуркаций). Математической основой для исследования данных процессов применялись элементы теории катастроф (ТК). Сама проблема принятия решений может быть сформулирована в виде задачи составления оптимального суточного графика отключений, которая представляет собой многокритериальную задачу математического программирования с большим количеством ограничений топологического, организационно-технологического и режимного характера.

Ключевые слова: энергосистема, устойчивость, переходные процессы, теория бифуркаций, катастрофы, параметры режима, топология, особые точки, однопараметрическое семейство функций.

Введение. При решении многих задач электроэнергетики часто возникает необходимость расчета установившегося режима (УР), т.е. необходимость определения управляемых режимных параметров в зависимости от топологии электрической схемы и нагрузок узлов основной сети. Расчет совокупности уравнений УР представляет собой сложную задачу, так как зиждется на недостаточно достоверной прогнозируемой информации, кроме того, часто отсутствует гарантия сходимости итерационных процессов и получения однозначных результатов. Основные вычислительные трудности при автоматизации решения этой задачи обусловлены необходимостью многократной проверки режимных ограничений. Поэтому процесс решения целесообразно разбить на два этапа. Вначале определяется оптимальный суточный график отключений без учета режимных ограничений, а затем проводится их проверка и соответствующая коррекция этого графика.

Для преодоления указанных трудностей целесообразно применять специальные приемы решения совокупности уравнений, соответствующих хронологической последовательности режимов за рассматриваемый отрезок времени. В качестве эффективного метода для исследования указанных задач могут быть использованы принципы ТК [1,2]. Имеется ряд приложений этих методов в дифференциальной геометрии, квантовой механике, термодинамике, теоретической электротехнике и т.д. В электроэнергетике инженерное приращение соответствующих методов теории катастроф рассмотрено, прежде всего, в работе [3], затем очень интересные решения были изложены в работах [4-7]. В данной статье приводится методика расчета совокупности физически реализуемых (устойчивых) режимов, определяемых с учетом переменной топологии и нагрузок узлов сети в плане суточного графика ЭЭС.

Исследования нестационарных режимов сложной ЭЭС сводятся к решению систем уравнений переходных процессов (ПП). Вариация активных или пассивных режимных параметров энергосистемы в момент возникновения различных нестационарных процессов ведет к изменению равновесных состояний самой энергосистемы. При этом вызывает определенный интерес в изучении плавного перехода количественных величин в качественное изменение поведения системы. В статье сформулирован подход и аналитический метод, позволяющий выполнить оценку активных параметров, опасных по условию существования режимов сложной ЭЭС.

При решении задач краткосрочного планирования режимов ЭЭС в составе АСДУ часто возникает необходимость расчета УР, соответствующих моментам изменения нагрузок узлов основной сети, управляемых режимных параметров, схем вариационных коммутаций электрических соединений. Сложность достоверной оценки параметров указанной совокупности УР объясняется громоздкостью расчета каждого отдельного режима, не единственностью решений уравнений УР, отсутствием гарантии сходимости итерационного процесса, неточностью прогнозирования суточных графиков нагрузок узлов основной сети. Для преодоления этих трудностей целесообразно изыскать специальные приемы решения совокупности уравнений, соответствующих хронологической последовательности режимов на рассматриваемые сутки.

Постановка задачи и ее формализация. Методы ТК позволяют определить местонахождение всех вырожденных, критических точек энергетических функций, которые описывают качественные изменения в поведении системы (бифуркации положений равновесия, изменение количества и типа критических точек при варьировании управляющих параметров). Сама проблема обычно описывается с помощью определенного числа уравнений, связывающих совокупность зависимых и независимых переменных, вариация которых формирует равновесное состояние исследуемого процесса. Состояние равновесия можно рассматривать как поверхность определенного числа измерений в пространстве управляющих параметров при скачкообразном их изменении. При этом управляемая система переходит в другое равновесное состояние, определяемое совокупностью режимных ограничений, позволяя найти их предельные значения. В глобальном смысле проблема сводится к исследованию устойчивости нелинейных систем.

В качестве примера можно рассмотреть, явление неустойчивости состояний равновесия в простейшей феррорезонансной цепи на падающем участке вольт–амперной характеристики (рис.1). При определенном сочетании параметров для одного и того же напряжения схема имеет три стационарных состояния, два из которых устойчиво, а одно (на падающем участке ВАХ) неустойчиво [1]. Даже для такой схемы вопрос существования режима и определения его устойчивых состояний не всегда очевиден и однозначен. Решение находят обычно путем упрощающих допущений, чаще всего, путем линеаризации. Адекватная математическая модель такой системы представляет собой дифференциальное уравнение, в котором нелинейный элемент представлен в виде кусочно–линейных аппроксимаций. Процедура поиска стационарного решения для такой задачи заключается в поиске смены условий кусочно–линейных аппроксимаций ВАХ нелинейного элемента.

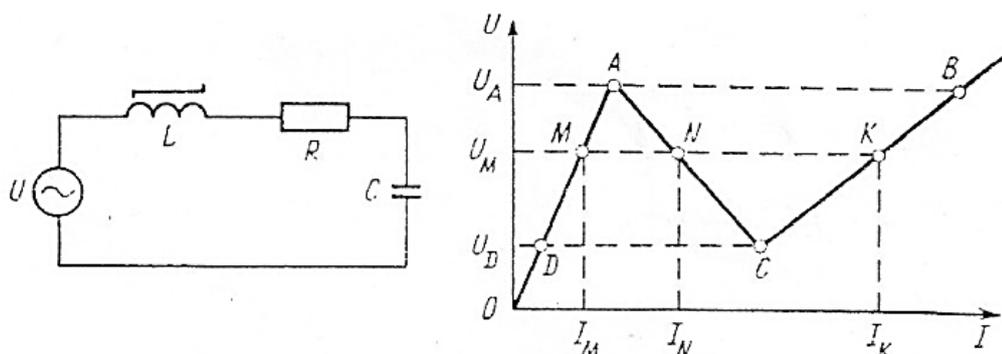


Рисунок 1 – Схема последовательной $R-L-C$ цепи с нелинейной индуктивностью и ее вольт–амперная характеристика

Таким образом, в соответствии с первым методом Ляпунова сначала выбирается математическая модель системы, затем осуществляется ее линеаризация в точке равновесия и исследуется известными методами на устойчивость уже линейная система, относя к исходной, нелинейной, допуская их динамическое сродство в окрестности малых отклонений переменных [2]. Кроме указанного примера определенный интерес представляет пример исследования переходных процессов в динамической системе «источник питания–электрическая дуга», когда возгорание дуги возникает при плавном нарастании тока, и устойчивых режимах горения устанавливается при определенных условиях перехода количественных величин в качественное состояние устойчивого процесса горения дуги [3]. Здесь на первый план выходят такие свойства этой системы, как нелинейность и диссипативность, которые проявляются в виде бифуркаций движения динамической системы в фазовой плоскости и появления автоколебаний в автономных системах.

Поведение любой динамической системы можно измерить переменными x, y, z, \dots и которая «управляется» другим набором переменных a, b, c, \dots . Переменные x, y, z, \dots – это координаты пространства поведения (внутренние переменные). Поведение системы задается ее потенциалом (или энергией) $W = (x, y, z, \dots; a, b, c, \dots)$, подчиненный лишь таким условиям, которые позволяют применить к функции W операции дифференциального и интегрального исчисления. В ТК доказано, что все события в физическом мире можно

описывать при помощи четырех переменных; трех пространственных координат и одной переменной. Поэтому, если иметь в виду физические применения, достаточно ограничиться 4-мерным пространством управления. Кроме того доказано, что в динамической системе с четырьмя внешними переменными могут встретиться ровно 7 типологически различных типов скачка, т.е., по сути дела, любое физическое нарушение непрерывности относится к одному из 7 типов. Эти 7 типов получили название элементарных катастроф [4]:

Таблица 1 – Поведение системы

Название	Потенциал W
Морщина	$\frac{1}{3}x^3 + ax$
Складка	$\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 + bx$
Ласточкин хвост	$\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{2}bx^2 + c$
Бабочка	$\frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{4}ax^4 + \frac{1}{3}bx^3 + \frac{1}{2}cx^2 + d$
Гиперболическая омбилика	$x^3 + y^3 + ax + by + cxy$
Эллиптическая омбилика	$x^3 - 3xy^2 + ax + by + c(x^2 + y^2)$
Параболическая омбилика	$x^2y + y^4 + ax + by + cx^2 + dy^2$

Методы и представления ТК наиболее применимы к таким системам, действительное состояние которых может быть определено в точке фазового пространства минимумом некоторой энергетической функции, или функции Ляпунова. Такой подход к анализу состояния равновесия системы осуществим, когда эта функция может быть приведена к каноническому виду одной из семи элементарных катастроф. Предположим, что система имеет плавную потенциальную функцию для описания динамики и имеет n переменных состояния и m параметров контроля. В соответствии с ТК количество различных качественных конфигураций разрывов, которое может возникнуть, зависит не от количества переменных состояния, а от количества параметров контроля. Т.е., если количество параметров контроля не больше четырех, тогда существует 7 основных или элементарных катастроф, и ни одна из них не включает более двух переменных состояния.

Качественные изменения в поведении системы (бифуркация положений равновесия, изменение количества и типа критических точек при варьировании управляющих параметров) описываются встречаемыми вырожденными, критическими точками энергетической функции. Метод ТК позволяет определить местонахождение всех вырожденных точек и получить их геометрическую интерпретацию.

Считаются известными дискретные моменты времени $t_i, I = \overline{1, N}$, периода планирования $T = [t_1, t_{N+1}]$, в которые происходят изменения схемы основной сети ЭЭС и (или) режимных параметров. Для каждого момента времени предполагаются заданными: схема сети, прогнозы активных и реактивных мощностей потребителя в узлах, коэффициенты трансформации трансформаторов, управляемые режимные параметры в узлах примыкания к сети электрических станций (ЭС) или энергорайонов (ЭР), содержащих ЭС.

Таким образом, определена хронологическая последовательность уравнений УР:

$$F_{t_i}(x) = 0, F_{t_i} : R^n \rightarrow R^n, i = \overline{1, N}, \quad (1)$$

где $x \in R^n$ – вектор параметров состояния основной сети ЭЭС.

Задача состоит в отыскании совокупности физически реализуемых неизвестных X_{t_i} этих уравнений, если они существуют при всех $i = \overline{1, N}$; в противном случае необходимо определить интервалы времени $\Delta T \subset T$ такие, что при $t_i \in \Delta T$ уравнения $F_{t_i}(x) = 0$ не имеют физически реализуемых решений, и произвести коррекцию схем сети и (или) управляемых режимных параметров, обеспечивающую существование таких решений.

Для определения понятия физической реализуемости решения уравнений $F_{t_i}(x) = 0, t_i \in T$, предположим, что:

- а) имеется семейство уравнений, параметризованное непрерывным параметром $t \in T$:

$$F(x, t) = 0, F(x, t) : R^n \times T \rightarrow R^n; \quad (2)$$

б) на некотором интервале времени $[t_0, t_1]$, предшествующем периоду планирования T , в ЭЭС фактически были реализованы статически устойчивые режимы, образующие непрерывную траекторию $X(t)$ в пространстве R^{n+1} и являющиеся решением уравнений $F(x, t) = 0, t \in [t_0, t_1]$;

с) функция $F(x, t)$ непрерывна по совокупности переменных x, t на множестве $R^n \times [t_0, t_1] \subset R^{n+1}$. Тогда решение x_{t_i} уравнения $F_{t_i}(x) = 0, t_i \in T$, является физически реализуемым, если выполняется одно из следующих условий:

1) существуют решения уравнений $F(x, t) = 0$ при $t \in (t_1, t_i)$, образующие непрерывное продолжение траектории $x(t)$ в R^{n+1} , реализованной в ЭЭС при $t \in [t_0, t_1]$, до точки (X_{t_i}, t_i) ;

2) решение X_{t_i} соответствует статически устойчивому режиму ЭЭС и существует такая его окрестность в R^n , что найдется $t, t_0 < t < t_i$, при котором уравнение $F(x, t) = 0$ не имеет в этой окрестности решений, обладающих указанным свойством.

В действительности при планировании суточного режима ЭЭС вместо континуального семейства (2) задана дискретная последовательность (1).

Пусть

$$F_{ii}(x) = \Phi(r_i, \bar{S}_i, x), i = 1, \bar{N}, \quad (3)$$

где r_i, \bar{S}_i – векторы исходных режимных и схемных параметров в момент $t_i \in T$. Можно ввести в рассмотрение аппроксимацию семейства (2) с помощью линейных гомотопий на дискретных интервалах периода T :

$$F(x, t) = \Phi(r_i \lambda(t) + r_{i+1}(1 - \lambda(t)), \bar{S}_i \lambda(t) + \bar{S}_{i+1}(1 - \lambda(t)), x), \quad (4)$$

где

$$\lambda(t) = \begin{cases} \frac{t_{i+1}-t}{t_{i+1}-t_i}, & \text{при } t \in [t_i, t_{i+1}], i = \overline{1, N-1}; \\ 1, & \text{при } t \in [t_N, t_{N+1}]. \end{cases} \quad (5)$$

Если функция $\Phi(r_i, \bar{S}_i, x)$ непрерывна по совокупности переменных (а это действительно справедливо при любой форме уравнений УР в технически допустимой области параметров), то семейство (4) удовлетворяет условиям п. 2.

В соответствии с (4) – (5) необходимо еще найти вектор X_{t_0} параметров состояния практически реализованного устойчивого режима в момент $t_0 < t_1$ и продолжить семейство (4) до значений параметра $t \in [t_0, t_1]$. Пусть t_0 – ближайший к t_1 момент времени, для которого имеется вектор \tilde{V} измеренных значений параметров режима ЭЭС, причем состав компонентов этого вектора обеспечивает топологическую наблюдаемость режима, тогда вектор X_{t_0} определяется как решение задачи статистического оценивания состояния:

$$(\tilde{V} - V(x))^* R^{-1} (\tilde{V} - V(x)) \rightarrow \min, x \in D, \quad (6)$$

где* – символ транспонирования (все векторы здесь и в дальнейшем представляются в виде столбцов); R^{-1} – матрица весовых коэффициентов; $V(x)$ – теоретическая зависимость вектора измененных параметров от вектора параметров состояния; $D \subset R^n$ – допустимая область изменения параметров.

Алгоритм решения задачи. В соответствии с определением понятия *переменных состояний* по вектору X_{t_0} могут быть однозначно определены любые режимные параметры УР, в частности параметры:

$$r_0 = r(x_{t_0}), \quad (7)$$

необходимые для формирования уравнения

$$F_{t_0}(x) = \Phi(r_0, \bar{S}_0, x) = 0. \quad (8)$$

Тем самым, в соответствии с (4) - (5) будет определено и семейство уравнений $F(x, t) = 0$ при $t \in [t_0, t_1]$.

Согласно теореме об обратной функции [8] достаточным условием того, чтобы существовала непрерывная траектория $x(t)$ решения уравнений семейства

$$F(x, t) = 0; F(x, t) : R^n \times [t_0, t_N] \rightarrow R^n \quad (9)$$

в окрестности X_{t_0} решения уравнения (9) является невырожденность матрицы Якоби в этой точке, т.е.

$$\det F_{(x)}(x, t) \neq 0; t = t_0; X = X_{t_0}. \quad (10)$$

Отсюда следует существование непрерывной траектории $X(t)$ физически реализуемых решений на некотором отрезке $[t_0, \tau]$, а также возможность практического построения этой траектории при помощи любого локально сходящегося итерационного процесса, поскольку при достаточно малом шаге t дискретизации семейства (9) решение X_t уравнения $F(x, t) = 0$ будет находиться в области принятия решения $x_{t+\Delta t}$ уравнения $F(x, t + \Delta t) = 0$. Траектория $X(t)$ может быть продолжена до тех пор, пока не будет выполнено одно из следующих условий:

$$\tau = t_{N+1}; \tag{11}$$

$$x\tau \in D \tag{12}$$

$$\det F'_{(x)}(x, t) = 0, t = \tau, x = x\tau. \tag{13}$$

Пусть в схеме замещения основной сети ЭЭС для расчета УР имеем m узлов примыкания ЭС или ЭР, содержащих ЭС. Предполагая, что таким ЭС или ЭР соответствуют эквивалентные синхронные генераторы, для которых считается выполненным одно из условий

$$E_q = \text{const}; E'_q = \text{const}; U_\Gamma = \text{const}, \tag{14}$$

можно записать уравнение их движения в виде

$$\mathbf{T}_j P^2 \delta = \varphi(\delta), \tag{15}$$

где $\delta \in R^m$ – вектор углов роторов относительно синхронно вращающейся оси; P^2 – оператор двукратного дифференцирования по времени; $\varphi(\delta)$ – вектор избытков активных мощностей; \mathbf{T}_j – диагональная матрица постоянных инерции.

Для того, чтобы исходные данные, принятые при расчетах P основной сети, не противоречили условиям (14), задающие реактивные мощности инъекций или модули напряжений в указанных выше узлах должны быть заданы не постоянными значениями, а функциональными зависимостями от векторов x параметров состояния сети. Вид этой зависимости для каждой эквивалентной машины однозначно определяется условием (14), если при решении задачи статического оценивания состояния ЭЭС для исходного момента времени $t = t_0$ в число оцениваемых параметров, наряду с вектором x , были включены соответствующие величины E_q, E'_q или U_Γ . Сформированное указанным образом семейство (9) уравнений УР однозначно определяет семейство динамических систем

$$\mathbf{T}_j (P^2, \delta) = \varphi(\delta, t), \varphi(\delta, t) : R^m \times [t_0, t_N] \rightarrow R^m. \tag{16}$$

Если пренебречь потерями активной мощности при передаче мощности от эквивалентных генераторов к соответствующим узлам примыкания, то можно показать, что:

а) решениям $x_t \in R^n$ уравнения УР основной сети $F(x, t) = 0, t \in [t_0, t_N]$, взаимно однозначно соответствуют положения равновесия $\delta_t \in R^m$ динамической системы $\mathbf{T}_j (P^2, \delta) = \varphi(\delta, t)$;

б) для соответствующих друг другу x_t и δ_t справедливо:

$$\det \varphi'_{(\delta)}(\delta, t) = 0 \Leftrightarrow \det F'_{(x)}(x, t) = 0, \delta = \delta_t; x = x_t. \tag{17}$$

Введением новых переменных $P\delta = S$ семейство (16) динамических систем приводится к нормальной форме

$$PY = \Psi(Y, t); \Psi(Y, t) : R^{2m} \times [t_0, t_N] \rightarrow R^{2m}, \tag{18}$$

$$\text{где } Y \begin{bmatrix} \delta \\ s \end{bmatrix}; \Psi(Y, t) = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_j^{-1} \varphi(\delta, t) \\ S \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Вследствие того, что для каждой системы из семейства (19) в любом положении равновесия Y_t имеет место $S_t = 0$, это семейство не является семейством общего положения в соответствующем функциональном пространстве.

Для характеристических чисел $\lambda[\Psi_{(Y)}(Y, t)]$, $P[\mathbf{T}_j^{-1} \varphi'_{(\delta)}(\delta, t)]$ при любом $Y = (\delta, s)$, и $t \in [t_0, t_N]$ справедливо соотношение

$$\lambda = P^2; \tag{20}$$

откуда следует, что необходимое условие устойчивости положения равновесия $Y_t = (\delta_t, 0)$ системы $PY = \Psi(Y, t)$ — мнимость всех характеристических чисел линеаризованной системы выполняется тогда и

только тогда, когда все характеристические числа матрицы $T_j^{-1}\varphi'_{(\delta)}(\delta, t)$ при $\delta = \delta(t)$ лежат в левой комплексной полуплоскости. Кроме того,

$$\det \Psi'_{(\varphi)}(Y, t) = 0 \Leftrightarrow \det \varphi'_{(\delta)}(\delta, t) = 0, Y = Y_t, \delta = \delta_t. \quad (21)$$

Эти соотношения позволяют при исследовании статической устойчивости рассматривать вместо семейства (18) общего положения семейство вида:

$$P_\delta = T_j^{-1}\varphi(\delta, t), \varphi(\delta, t) : R^m \times [t_0, t_N] \rightarrow R^m, \quad (22)$$

являющегося семейством общего положения в соответствующем функциональном пространстве. Семейства общего положения представляют собой в определенном смысле типичные случаи, которые рассматриваются в теории катастроф.

Некоторое свойство является типичным для элементов пространства (метрического, топологического), если множество элементов, обладающих этим свойством, всюду плотно в этом пространстве. Это означает, что любой нетипичный элемент малым шевелением может быть переведен в типичный. Следовательно, в практических задачах имеет смысл рассматривать только типичные элементы — объекты общего положения.

При любом формировании $t \in [t_0, t_N]$ динамической системы из семейства (22) соответствует векторное поле:

$$\varphi_t(\delta) = \varphi(\delta, t) : R^m \rightarrow R^m, \quad (23)$$

а семейству (22) – семейство векторных полей. Вектор δ_t , удовлетворяющий уравнению

$$\varphi_t(\delta) = 0, \quad (24)$$

соответствует положению равновесия динамической системы $P_\delta = T_j^{-1}\varphi(\delta, t)$, называемой *особой точкой* векторного поля $\varphi_t(\delta)$.

Особые точки семейства векторных полей УР. Траектория $\delta(t)$ положения равновесия систем семейства (22) в R^{m+1} называется *кривой особых точек семейства векторных полей*. Значения параметра t , при которых сливается несколько особых точек и соответствующие точки $(\delta_t, t) \in R^{m+1}$ называются *бифуркационными*. Для однопараметрических семейств векторных полей общего положения, определенных на компактном фазовом пространстве, бифуркационные значения параметра изолированы, и в соответствующих бифуркационных точках происходит слияние (исчезновение либо появление) двух особых точек.

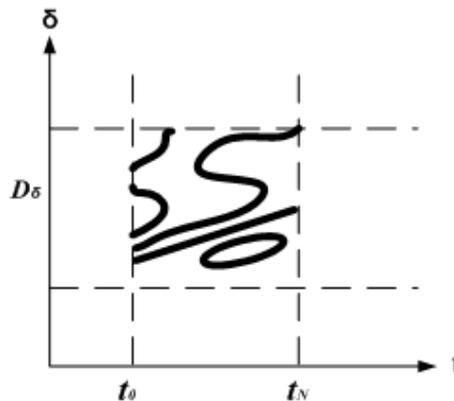


Рисунок 2 – Типичные кривые особых точек

На рис.2 условно в R^2 показаны типичные кривые особых точек. D_δ – допустимая область значений фазовой переменной. Необходимым условием того, чтобы значение параметра было бифуркационным, является вырожденность особой точки векторного поля, соответствующего данному значению параметра, т.е. вырожденность матрицы Якоби в этой точке. Согласно (17), для семейств векторных полей бифуркационными являются одни и те же значения параметра в силу утверждения (16), что кривые особых точек этих полей топологически эквивалентны:

$$F(t): D \times [t_0; t_N] \rightarrow R^n, \quad (25)$$

$$(\delta, t): D_\delta \times [t_0; t_N] \rightarrow R^m, \quad (26)$$

Семейство векторных полей (25) в силу наличия однозначной зависимости порождает семейство (26). Кроме того, можно показать, что при любых $\varphi(\delta, t)$ матрице Якоби поля $\mathbf{F}(x, t)$.

$$\delta = H(x), \quad (27)$$

Разобьем векторы $\mathbf{F}(x)$ и \mathbf{X} на блоки

$$\mathbf{F}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_\delta(x) \\ \mathbf{F}_\alpha(x) \end{bmatrix}; \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}' \\ \mathbf{X}'' \end{bmatrix}. \quad (28)$$

Здесь $\mathbf{F}_\delta(x)$ – вектор, определяемый значениями левых частей уравнений баланса активных мощностей в узлах примыкания ЭС или ЭР, содержащих ЭС, к основной сети ЭС, где положительными считаются инъекции мощности в узел; \mathbf{X}' – вектор такой же размерности как $\mathbf{F}_\delta(x)$. Тогда

$$\varphi'_\delta = (\mathbf{F}'_\delta(x') - \mathbf{F}'_\delta(x'') (\mathbf{F}'_\alpha(x''))^{-1} \mathbf{F}'_\alpha(x')) (\mathbf{H}'(x') - \mathbf{H}'(x'') (\mathbf{F}'_\alpha(x''))^{-1} \mathbf{F}'_\alpha(x'))^{-1},$$

где $\mathbf{F}'_\delta(x')$, $\mathbf{F}'_\delta(x'')$, $\mathbf{F}'_\alpha(x')$, $\mathbf{F}'_\alpha(x'')$, $\mathbf{H}'(x')$, $\mathbf{H}'(x'')$ – соответствующие блоки матриц $\mathbf{F}'(x)$, $\mathbf{H}'(x)$. Тогда отсюда можно вывести, что для любых:

$$t \in [t_0, t_N], x_t \in D, \delta_t \in D_\delta,$$

$$\det \mathbf{F}'_{(x)}(x, t) = 0 \Leftrightarrow \det \varphi'_{(\delta)}(\delta, t) = 0. \quad (30)$$

Соотношение (30) сохраняется при любых формах уравнений УР, в частности, не обязательно включающих в себя условие баланса активных мощностей в узлах. Согласно [2] в окрестности особой вырожденной точки δ_τ , где появляются два положения равновесия, однопараметрическое семейство динамических систем общего положения (22) посредством замены координат $t(\varepsilon): R \rightarrow R$:

$$\delta(U, v, z): R^m \rightarrow R^m, 0 \rightarrow \delta_\tau, \quad (31)$$

может быть представлено в виде

$$P_U = U^2 + \varepsilon, U \in R;$$

$$P_v = -v, v \in R^{m-};$$

$$P_z = Z, z \in R^{m+}. \quad (32)$$

Здесь m_-, m_+ – количество характеристических чисел матрицы $\varphi'_{(\delta)}(\delta, t)$ при $t = \tau$, $\delta = \delta_\tau$ соответственно в левой и правой комплексной полуплоскости

$$\backslash m_- + m_+ = m - 1. \quad (33)$$

Для семейства (32) матрица Якоби в нулевом положении равновесия при $\varepsilon = 0$, что соответствует бифуркационной точке семейства (22), и имеет единственное нулевое характеристическое число. Следовательно, в типичном случае бифуркации только одно характеристическое число матрицы $\varphi'_{(\delta)}(\delta, t)$ проходит через нуль.

Если $m_+ = 0$, то при подходе к бифуркационному значению параметра $\varepsilon = 0$, т.е. при достаточно малых по модулю $\varepsilon < 0$ системы из семейства (32) имеют вблизи точки $(U, v, z) = 0$ устойчивое положение равновесия в точке $(-\sqrt{|\varepsilon|}, 0, \dots, 0)$ и неустойчивое в точке $(+\sqrt{|\varepsilon|}, 0, \dots, 0)$.

Отсюда следует, что для семейства (22) в случае, если положение равновесия δ_{t_0} устойчиво, то и вся траектория $(t), t \in [t_0, \tau]$, решений уравнения УР из семейства (9) определяют статически устойчивые режимы ЭЭС. Из (17) вытекает, что в рассматриваемом типичном случае:

$$\det \mathbf{F}'_{(x)}(x, t) = 0, t = \tau, x = x_\tau; \quad (34)$$

$$\det \mathbf{F}'_{(x)}(x, t) \neq 0, t \in [t_0, \tau], x = x(t). \quad (35)$$

Этим определяется физически реализуемое решение уравнений УР.

Согласно теореме о гомотопных векторных полях [7] на каждой ветви траектории $\delta(t), t \in [t_0, \tau]$ сохраняются индексы особых точек:

$$\text{ind}(\varphi, \delta_t) = \text{sign} \det \varphi'_{(\delta)}(\delta, t) = \text{const}. \quad (36)$$

Так как свободный член характеристического уравнения каждой динамической системы из семейства (22) связан с якобианом соотношением

$$a_m = (-1)^m \det [\mathbf{T}_j^{-1} \Phi'_\delta(\delta, t)], \quad (37)$$

то из (36) следует, что для якобианов на устойчивой ветви траектории $\delta(t)$ справедливо:

$$(-1)^m \det \Phi'_\delta(\delta, t) > 0. \quad (38)$$

В соответствии с (31), (32) при $t = \varepsilon$, когда выполняется условие (34), имеет место предельный режим ЭЭС по апериодической устойчивости. Далее необходимо исследовать семейство уравнений УР $t \in [\tau, t_N]$ с целью выявления момента возникновения статически устойчивых режимов.

Рассмотрим семейство функций

$$f(x, t) = \mathbf{F}^*(x, t), \mathbf{F}(x, t), f(x, t): R^n X [t_0, t_N] \rightarrow R. \quad (39)$$

Известно, что корни x_t уравнений УР из семейства (9) являются критическими точками (минимумами) функций $f(x, t)$:

$$f'_{(x)}(x, t) = 0, t \in [t_0, \tau], x = x_t, \quad (40)$$

которые не вырождены при ненулевом и вырождены при нулевом якобиане вектор-функции $\mathbf{F}(x, t)$:

$$\det \mathbf{f}''_{(x)}(x, t) \neq 0; t \in [t_0, \tau], x = x_t; \quad (41)$$

$$\det \mathbf{f}''_{(x)}(x, t) = 0; t = \tau, x = x_\tau. \quad (42)$$

Из теории катастроф известно, что в типичном случае однопараметрическое семейство гладких функций в окрестности вырожденной критической точки с помощью некоторых замен и сдвигов начала координат может быть приведено к виду

$$g(U, \varepsilon) = U_1^3 + \varepsilon U_1 \pm U_2^2 \dots \pm U_n^2, U \in R^n, \quad (43)$$

где функции, имеющей вырожденную критическую точку, соответствует

$$g(U, 0) = U_1^3 \pm U_2^2 \pm \dots \pm U_n^2, \quad (44)$$

где ε – параметр; n – размерность области определения семейства.

Однопараметрическому семейству функций соответствует кривая критических точек в R^{n+1} , проекция которой на U_1 – ось (U_1, ε) в типичном случае имеет в соответствии с (43) вид, показанный на рис. 3.

На одной из ветвей кривой критические точки являются минимумами по U_1 , на другой – максимумами. Такая бифуркация критических точек, как на рис.3, в начале координат называется *катастрофой складки*. В частном случае семейства (39) из того, что в окрестности вырожденной критической точки $f(x, t) \geq 0$ и ε – левая ветвь кривой критических точек, где $f(x, t) = 0$, можно вывести, что семейство приводится к виду:

$$g(U, \varepsilon) = U_1^4 + \varepsilon U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_n^2. \quad (45)$$

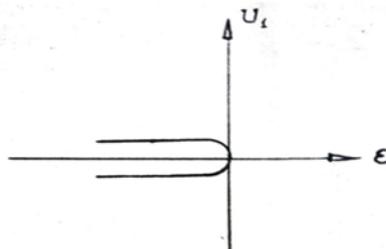


Рисунок 3 – Проекция кривой критических точек в R^{n+1} на плоскость (U_1, ε)

Вместо катастрофы складки, в вырожденной критической точке имеет место слияние трех точек минимума и появление одного максимума по U_1 , как показано на рис. 3. Максимумы по U_1 функций $g(U, \varepsilon)$ вида (45) являются минимумами по $x \in R^n$ функций $f(x, t)$, максимумы по $(U_1 - 1)$ – сёдлами функций $f(x, t)$.

Минимумы $f(x, t)$ на одной из ветвей являются корнями уравнений $F(x, t) = 0$ согласно принятому выше условию $f(x, t) = 0$, а из теории о постоянстве вращения гомотопных векторных полей вытекает, что существует единственная другая ветвь критических точек $f(x, t)$, на которой они являются корнями уравнений $F(x, t) = 0$.

Оси абсцисс на рис. 3 соответствует траектория $x(t)$ таких критических точек функции $f(x, t)$, которые при $t \in [t_0, \tau]$ являются ее минимумами, а при $t > (\tau - 1)$ – сёдлами. Из того, что эти критические точки не являются корнями уравнений $F(x, t) = 0$, вытекает вырожденность матриц $\mathbf{F}'_{(x)}(x, t)$ в этих точках. Потому траектория $x(t)$ называется критической линией нулевого якобиана семейства векторных полей (25). В силу (30) ей соответствует критическая линия $\delta(t)$ нулевого якобиана семейства векторных полей (26).

Критические линии $x(t)$, $\delta(t)$, $t \geq \tau$ нулевых якобианов существуют в силу того, что при $t = \tau$ одно из характеристических чисел матрицы $\Phi'_{(\delta)}(\delta, t)$ приняло нулевое решение и сохраняет его при $t > \tau$. Можно показать, что в типичном случае на линии $\delta(t)$ при $t > \tau$ не происходит переход через нуль других характеристических чисел $\Phi'_{(\delta)}(\delta, t)$. Действительно, в пространстве R^{m+1} точки, в которых нулевое характеристическое число имеет кратность 2, образуют многообразие коразмерности 2, заданное уравнениями:

$$\left[\Phi'_{(\delta)}(\delta, t) \right] L_1(\delta, t) = 0, \left[\Phi'_{(\delta)}(\delta, t) \right]^2 L_2(\delta, t) = 0, \quad (46)$$

где $L_1(\delta, t)$, $L_2(\delta, t)$ – линейно независимые векторы ядра матрицы $\Phi'_{(\delta)}(\delta, t)$, являющегося двумерным линейным подпространством в R^m . Коразмерность линии $\delta(t)$, в R^{m+1} равна m . Следовательно, необходимое условие трансверсальности пересечения многообразия (46) с $\delta(t)$ не выполнено.

Таким образом, все ненулевые характеристические числа матрицы $\Phi'_{(\delta)}(\delta, t)$, $t = \tau$, $\delta = \delta_\tau$ сохраняют на критической линии $\delta(t)$ нулевого якобиана свои знаки. Движение по соответствующей критической линии $x(t)$ нулевого якобиана при достаточно малом шаге Δt дискретизации интервала (τ, t_N) может быть определено при помощи любого локально сходящегося метода минимизации функций $f(x, t)$.

Если при движении по критической линии $x(t)$ нулевого якобиана в некоторый момент \bar{t} , $\tau < \bar{t} < t_N$ происходит вырождение критической точки функции $f(x, t)$, т.е.

$$\det \mathbf{f}''_{(x)}(x, t) = 0, t = \bar{t}, x = x(\bar{t}), \quad (47)$$

что соответствует решению уравнения УР, соответствующего предельному по апериодической устойчивости режиму.

При этом для выбора траектории статически устойчивых режимов среди двух ветвей решений уравнений УР, начинающихся в точке $t = \bar{t}$, $x = x(\bar{t})$, достаточно испытать одно из двух решений уравнения $F(x, t) = 0$, $t > \tau$, имеющих в окрестности указанной точки, по критерию (38), где $\Phi'_{(\delta)}(\delta, t)$ определяется по (23). Существование при данном векторном поле других статически устойчивых решений уравнений УР при сколько-нибудь большой размерности фазового пространства динамической системы (22) крайне маловероятно (принцип “хрупкости хорошего” в теории катастроф). Для этого необходимо, чтобы в другой области пространства знаки характеристических чисел матрицы $\mathbf{T}_j^{-1} \Phi_8^{-1}(\delta, t)$ образовали единственное сочетание из огромного количества возможных [8]. Этим обосновывается определение понятия физически реализуемого режима.

После построения траекторий $x(t)$, $\bar{x}(t)$ статически устойчивых режимов соответственно на интервалах $[t_0, \tau]$, $(\bar{t}, t_N]$, $\tau, \bar{t} < t_N$ для определения интервала $\Delta T = [t^{(w)}, t^{(w)}]$, на котором требуется корректировать исходные данные для расчетов УР, необходимо решить уравнения:

$$\|x(t^{(w)} - x(\tau)\| = k_3; \|x(t^{(w)} - \bar{x}(\bar{t}))\| = k_3,$$

где k_3 – заданный коэффициент запаса устойчивости по норме вектора параметров состояния основной сети ЭЭС.

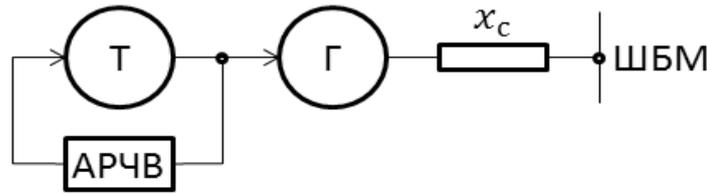


Рисунок 4 – Упрощенная схема исследуемой ЭЭС

Для иллюстрации этого метода была рассмотрена математическая модель упрощенной ЭЭС (рис.4), в которой система дифференциальных уравнений, описывающая динамику ЭЭС, содержит уравнение электромагнитных переходных процессов в обмотке возбуждения генератора и уравнение АРЧВ [5]. Для оценки динамической устойчивости обычно используется зависимость $\delta = f(t)$ во время переходного процесса, которую можно получить путем решения дифференциального уравнения движения ротора:

$$T_j \frac{d^2 \delta}{dt^2} = P_0 - P_m \sin \delta.$$

Однако даже в простейшем случае данное уравнение из-за нелинейной зависимости активной мощности генератора от величины δ представляет значительные трудности, и в общем случае не всегда можно получить решение. В ряде случаев динамическую устойчивость системы можно проверить без решения дифференциальных уравнений, рассматривая лишь энергетические соотношения, возникающие в переходном процессе. Наилучшие результаты были получены при совместном использовании метода площадей и последовательных интервалов.

Работа, совершаемая ротором

$$A = \int_{\delta_0}^{\delta_1} \Delta P d\delta = f_A(A_a > A_d) \text{ или } f_A(A_a < A_d),$$

где $\Delta P = P_0 - P_m \sin \delta$.

Здесь δ – угол между векторами ЭДС генератора и вектором напряжения шин приемной. Обозначения других величин не отличаются от общепринятых в теории переходных электромеханических процессов.

Интегрируем систему дифференциальных уравнений следующего вида

:

$$T_{J_i} \frac{d^2 \delta_i}{dt^2} = P_{T_i} - P_{\Delta_i},$$

где $P_{\Delta_i} = y_{ii} E_i^2 \sin a_{ii} - \sum_{m \neq i} y_{im} E_i E_m \sin(\delta_i - \delta_m - a_{im}), i=1, 2, \dots, n$.

После чего от системы n уравнений второго порядка можно перейти к системе $2n$ уравнений первого порядка

$$\frac{d\delta_i}{dt} = \omega_i; T_{J_i} \frac{d\omega_i}{dt} = P_{T_i} - P_{\Delta_i}.$$

Затем заменяя дифференциалы приращениями угла генератора на каждом шаге интегрирования, решаем систему алгебраических уравнений первого порядка.

Таким образом, после замены переменных с учетом уравнения связи между E и E'_q , система уравнений (48) была приведена к системе дифференциальных уравнений, записанной в форме Коши. В качестве функции Ляпунова для такой системы была сформулирована функция, в которой составляющие элементы соответствовали кинетической и потенциальной энергии. Множество критических точек этой функции, т.е. положений равновесия системы совпадало с множеством критических точек потенциальной энергии. Здесь функция энергии представлялась в виде многообразия набора бифуркаций, который соответствовал области динамической устойчивости ЭЭС. Таким образом, была получена геометрическая интерпретация положений равновесия исследуемой ЭЭС в виде многообразия стандартной катастрофы сборки.

Пусть семейство функций представлено в виде:

$$F : S \times C \rightarrow R,$$

где S – многообразие R^n , а C – другое многообразие R^n . Обычно предшествующий R^n называется пространством состояния, а последний R^r – пространством контроля.

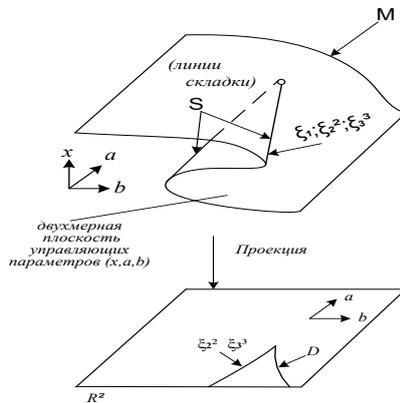


Рисунок 5 – Многообразие катастрофы сборки M поверхность со сборкой, представляющее множество критических точек энергетической функции

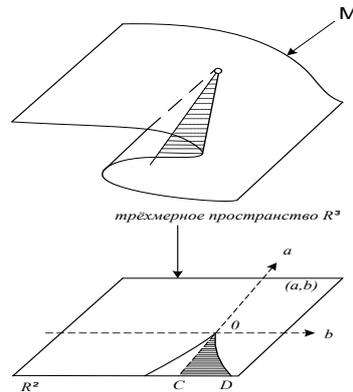


Рисунок 6 – Области равновесия (заштрихованы) исследуемых ЭЭС на многообразии M и в плоскости управления $B(a,b)$

Следовательно, F – отображение плавной функции $R^n \times R^r \rightarrow R^1$. Число r – разворачивающееся измерение, которое в стандартной универсальной форме совпадает с коразмерностью в начале раскрытия функции. Набор всех критических точек потенциалов F_c в семействе F , в котором

$$DF_c(x) = 0$$

является множеством $R^n \times R^r$ и определяется из многообразия катастроф. Проекцией является $X: R^n \times R^r \rightarrow R^1$. Множество особых точек x в M , в котором x является особой, т.е. ранг её производной меньше, чем r , представляет собой множество особенности S . Изображение $x(S)$ в C называется бифуркационным множеством B . Это множество B является наиболее важным, поскольку оно находится в области контроля, т.е. все скачки происходят на нем в соответствии с вариацией параметров контроля. Эти параметры в зависимости от изменений равновесных состояний самой ЭЭС (работа АРВ, регуляторов частоты и напряжения, коммутационные вариации, атмосферные перенапряжения, работа систем автоматизации и т.д.). В стационарном состоянии выходная электрическая мощность P_e определяется как:

$$P_e = \frac{E_q V}{X_d} \sin \delta - V^2 \frac{X_q - X_d}{2X_q X_d} \sin 2\delta = P_m \sin \delta - A \sin 2\delta, \quad (49)$$

$$P_m = \frac{E_q V}{X_d}; \quad A = \frac{X_q - X_d}{2X_q X_d}.$$

Для критерия равной площади устойчивости, представленного на рисунке 5, необходимо, чтобы член $\int_{\delta_0}^{\delta_2} P_a d\delta$

равнялся нулю [9]. Считаем δ_0 фиксированным и представляющим собой минимальный угол колебаний, когда входная мощность (механическая мощность P_1) плавно отходит от начального значения P_0 с помощью регулятора входной мощности контрольной системы. Затем по уравнению (49) может быть вычислен максимальный угол колебаний δ_2 при каждом значении P_1 , который будет сохранять систему устойчивой, в зависимости от другого параметра P_m , который является пределом устойчивости.

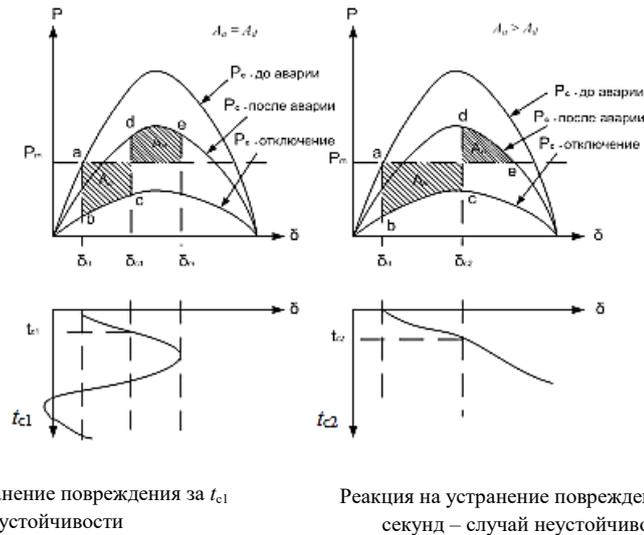


Рисунок 7 – Площадки ускорения и торможения для исследуемой системы

Этот параметр можно отслеживать с помощью автоматического контроля тока возбуждения и реактивного сопротивления. Тогда в соответствии с теорией катастроф энергетическая функция получит вид:

$$F = \int_{\delta_0}^{\delta_2} [P_i - (P_m \sin \delta - A \sin 2\delta)] d\delta.$$

Далее определяются критические точки, в которых функция F стремится к нулю для $\delta_1 < \delta_2 < \pi - \delta_0$ с воздействием параметра контроля. Из последнего уравнения следует:

$$F = P_1(\delta_2 - \delta_0) + P_m \cos \delta_{\delta_0}^2 - \frac{1}{2} A \cos 2\delta_{\delta_0}^2.$$

После этого можно определить устойчивые рабочие точки и их расположение на многообразии катастроф M (бифуркационные узлы). Многообразие катастроф M является набором всех критических точек F_c в семействе F . Затем, чтобы получить набор бифуркаций B , набор сингулярности S проецируется на пространство контроля R^r , устраняя переменные состояния с помощью уравнений (48) и (49). Набор бифуркаций обеспечивает проецирование области устойчивости функции $V(x, c)$, т.е. он содержит все невырожденные критические точки функции V .

Если в энергосистеме отключилась одна из линий, ротор будет ускоряться и вырабатывать кинетическую энергию. Если проблема устранена в критический период отключения, кинетическая энергия, возникшая в связи с аварией, будет поглощаться системой и накопленная энергия в конце периода будет равна нулю; система будет считаться устойчивой. Энергетическая функция в различные моменты отключения представлена на рисунке 6. С точки зрения ТК рисунок 6 может быть рассмотрен как равновесная энергетическая поверхность или как многообразие катастроф, при котором кинетическая энергия системы равна потенциальной. Все невырожденные критические точки лежат на энергетической равновесной поверхности, что соответствует критическим периодам отключения [10].

После замены переменных и преобразования энергетической функции можно получить классическое уравнение *ласточкин хвост* в виде одной из элементарных катастроф, в которой коэффициенты при неизвестных соответствуют параметрам уравнений (48 и 49):

$$y^4 + uy^2 + vy + w = 0,$$

где $u = -6(2 + \beta^2); \quad v = -8\beta^2 + 24 \frac{k_1}{k_2};$

$$w = 3\beta^2(4 - \beta^2) + 24 \left(1 + \frac{k_4 + k_1\beta}{k_2} \right).$$

Таким образом, значение областей динамической устойчивости может быть представлено набором бифуркаций многообразия катастрофы не только с точки зрения скорости и точности, но и позволяет

определить пределы динамической устойчивости сети после аварии (рис. 7). Выполненные исследования показали, что ТК может быть успешно использована для точного определения областей динамической устойчивости и максимальной механической мощности в системе до возникновения переходного процесса.

Коррекция планируемых режимов может быть выполнена также и увеличением ЭДС эквивалентных генераторов [11] в технически допустимых пределах, повторной оптимизацией режима ЭЭС по активной мощности на интервале ΔT с введением ограничений по перетокам активной мощности или углам расхождения напряжений по концам слабых связей, а также сезонным запретом отключений в ремонт связей с наибольшей пропускной способностью.

Выводы:

1. Проблема принятия решений при планировании суточного режима электроэнергетической системы может быть сформулирована в виде многокритериальной задачи математического программирования с большим количеством ограничений топологического, организационно-технического и режимного характера.

2. Система ограничений формирует область существования реального процесса при переходе системы из одного устойчивого состояния в другое. Автоматизация решения этой задачи обусловлена необходимостью многократной проверки ограничений при планировании перспективных и текущих режимов энергосистем.

3. Множество областей переходных режимов может быть представлено набором бифуркаций многообразия катастрофы и позволяет определить пределы динамической устойчивости сети после аварии.

Список использованной литературы

1. Постон, Т. Теория катастроф и её приложения / Т. Постон, Я. Стюарт. – М.: Мир, 1980. – 387 с.
2. Джилмор, Р. Теория катастроф для ученых и инженеров / Р. Джилмор. – М.: Мир, 1983. – 484 с.
3. Гурский, С.К. Применение теории катастроф к расчету установившегося режима ЭЭС / С.К. Гурский, Б. Б., Новицкий // Тез. докл. к Всесоюз. НТК “Моделирование электроэнергетических систем” – Баку: – 1982. – С. 45-46.
4. Сидорец, В.Н. Бифуркационные процессы в RC-цепях с электрической дугой / В.Н. Сидорец, В.В. Кирилук, С.И. Тупицын // Киев. Техническая электродинамика. – 1989. №2. -- С.29 – 55.
5. Sallam, A.A. Catastrophe Theory as a Tool for Determining Synchronous Power System Dynamic Stability / A. A. Sallam, J. L. Dineley // Trans. – IEEE Power App. And Syst., 1983, v. PAS-102, № 3, p.622-630.
6. Кубарева, Т.С. Параметры электроэнергетической системы, предельные по условию статической устойчивости / Т.С. Кубарева // Изв. АН СССР, Энергетика и транспорт. – 1986. - №1. – С. 46-52.
7. Завьялов, В.И. Методы исследования устойчивости нелинейных систем / В.И. Завьялов // Известия АН СССР. Энергетика и транспорт. – 1986.– №4. – С.70 – 79.
8. Васин, В.П. Определение узлов электрической сети, опасных по условию существования режима сложной электроэнергетической системы / В. П. Васин, Ю.В. Кишкин, Г.И. Чертова // Изв. АН СССР, Энергетика и транспорт. 1990. – № 2. – С. 27 – 34.
9. Vijayakumar, K. Multiobjective Optimization Methods for Congestion Management in Deregulated Power Systems / K. Vijayakumar // Hindawi Publishing Corporation Journal of Electrical and Computer Engineering, Volume 2012, Article ID 962402, 8 pages, doi: 10. 1155/ 2012 / 962402.
10. Kareem, J. Transient Stability Assessment of Multi-Machine Power System Using Swallowtail Catastrophe Theory // Comput. Eng. Inf. Technol. -- 2014, № 3. P. 6–16.
11. Александров, О.И. Оценка режимных параметров электроэнергетической системы с позиций теории катастроф / О.И. Александров, М.Ш. Мисриханов, Ю.С. Бампи // Методические вопросы исследования надежности больших систем энергетики. Сборник научных статей. Выпуск 66. – Минск. – 2015. – С. 302-307.

O. Alexandrov, Cand.Sc. (Eng), Assoc. Prof, ORCID 0000-0003-2813-3692,
Belarusian State Technological University;

D. Ivanko, Cand.Sc. (Eng), Assoc. Prof, ORCID 0000-0003-2813-3692,
Norwegian University of Science and Technology

T. Zhukovskaya, PhD, student,
Belarusian national technical university

**APPLICATION OF THE CATASTROPHE THEORY FOR ASSESSMENT OF EXISTENCE
OF THE MODE OF ELECTRICAL POWER SYSTEM**

The research of the nonstationary modes of the composite electrical power system (EES) comes down to the solution of sets of equations of transition phenomenon. The variation of the fissile or passive regime parameters of a power supply system at the time of emergence of various nonstationary processes leads to change of equilibrium states of the power supply system. At the same time attracts particular interest in studying of the smoothly varying transition of quantities to high-quality change of behavior of system. In article the approach and an analytical method allowing to execute assessment of the fissile parameters dangerous on a condition of existence of the mode of the composite EES is formulated. Areas of stability of EES which reflect a condition of the energy balance determined by variety of saltatory changes (bifurcations) are considered. The mathematical basis for a research of these processes applied elements of the theory of accidents.

Keywords: power supply system, stability, transition phenomenon, theory of bifurcations, accidents, mode parameters, topology, singular points.

Надійшла 12.08.2018

Received 12.08.2018