

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ РЕЖИМУ РОЗІГРІВУ ОДНОЧЕРВ'ЯЧНОГО ЕКСТРУДЕРА

## MATHEMATICAL MODEL OF WARMING-UP MODE IN ONEWORM EXTRUDER

**Анотація.** Досліджено екструдер як об'єкт математичного моделювання. При моделюванні екструдер розглядався як тепловий об'єкт, який складається з таких ємностей: шнека, корпусу, повітряного прошарка між шнеком і корпусом та нагрівачем. Розглянуті питання математичного моделювання режиму розігріву одночерв'ячного екструдера при підготовці до роботи. Отримана математична модель режиму розігріву одночерв'ячного екструдера, яка враховує основні фактори, які впливають на підвищення ефективності роботи екструдера та енергозбереження. Ця модель має універсальний характер і може бути використана в екструдерах різної геометрії. Для аналізу ефективності подальшого використання розробленої математичної моделі слід провести експериментальні дослідження її адекватності.

**Ключові слова:** одночерв'ячний екструдер, математичне моделювання, режим розігріву, універсальна модель.

**Анотация.** Исследован экструдер как объект математического моделирования. При моделировании экструдер рассматривался как тепловой объект, который состоит из таких емкостей: шнека, корпуса, воздушного пространства между шнеком и корпусом и нагревателем. Рассмотрены вопросы математического моделирования режима разогрева одночервячного экструдера при подготовке к работе. Получена математическая модель режима разогрева одночервячного экструдера, которая учитывает основные факторы, которые влияют на повышение

эффективности работы экструдера и энергосбережения. Данная модель, имеет универсальный характер и может быть использована в экструдерах разной геометрии. Для анализа эффективности последующего использования разработанной математической модели следует провести экспериментальные исследования ее адекватности.

**Ключевые слова:** одночервячный экструдер, математическое моделирование, режим разогрева, универсальная модель.

**Annotation.** An extruder as object of mathematical design is investigational. At a design an extruder was examined as a thermal object which consists of such capacities: worm, corps, air space between worm and corps and heater. The questions of mathematical design of the mode of warming-up of an oneworm extruder are considered at a make ready. The mathematical model of the mode of warming-up of an oneworm extruder is got, which takes into account basic factors which influence on the increase of efficiency of work of extruder and energy-savings. This model has universal character and can be used in the extruders of different geometry. For the analysis of efficiency of the subsequent use of the developed mathematical model it is necessary to conduct experimental researches of its adequacy.

**Key words:** oneworm extruder, mathematical design, warming-up mode, universal model.

В процесі виробництва полімерних виробів методом екструзії проводять попередній розігрів екструдера, адже завантаження полімеру в нерозігрітий апарат призводить до порушення технологічного режиму, а іноді і до аварійних ситуацій [1-2]. Цей етап є важливим у зв'язку з його енергоємністю, і, крім того, допомагає запобігти виникненню браку в кінцевій продукції. При недостатньому рівні обігріву корпусу екструдера вихідний продукт може виявитися низької міцності, а його поверхня буде тьмяною і темною або мати інші невідповідності до регламентованих стандартів. Для підвищення ефективності режиму розігріву виникає потреба у його дослідженні шляхом математичного моделювання.

Питання математичного моделювання режиму розігріву екструдера безпосередньо перед режимом «робочої» експлуатації розглядається в роботах [1-5].

У роботах [1-2] розглянута лише статична модель режиму розігріву, що, в свою чергу, не дає можливості дослідити динаміку процесу. Статична модель також не дає змогу зробити висновки щодо часу, який необхідно витратити на розігрів екструдера до регламентованої температури при певній потужності нагрівачів.

У роботі [3] авторами представлена модель екструдера у вигляді пустотілого циліндра, при цьому нехтують існуванням шнека, що не дає змогу отримати повну картину розподілу температур в апараті і дає спотворену картину температурного розподілу у корпусі.

У роботі [4] представлено систему рівнянь, що описують динамічний режим екструдера як об'єкта з розподіленими параметрами, проте не вказано шляхів її розв'язку, що унеможливило проведення дослідження. Крім того, нагрівачі розглядалися як зосереджені теплові ємності і не були наведені дані для розрахунку їхніх теплових режимів.

### Постановка задачі

В умовах впровадження енергозощаджувальних технологій у виробництво полімерних виробів методом екструзії важливим етапом є створення оптимальної математичної моделі керування режимом розігріву екструдера.

У зв'язку з цим виникає необхідність математичного моделювання режиму розігріву одночервячного екструдера перед етапом безпосереднього процесу виготовлення продукції та дослідження розподілу температур в апараті залежно від потужності нагрівачів у динамічному режимі.

В рамках даної роботи буде сформовано систему рівнянь, яка буде описувати температурні режими екструдера з метою її подальшого розв'язку в програмному пакеті *Comsol Multiphysics*.

### *Одночервячний екструдер як об'єкт математичного моделювання*

Для проведення математичного моделювання обрано екструдер із параметрами, наведеними у табл. 1.

Як об'єкт математичного моделювання екструдер представлено у вигляді зрізаного по осі в діаметральному напрямі циліндра. Умовно ділимо екструдер на три зони. В кожній зоні встановлено по одному нагрівачу з однаковими технічними характеристиками (рис.1).

При моделюванні екструдер розглядається як тепловий об'єкт, який складається з таких ємностей: шнека, корпусу, повітряного прошарка між шнеком і корпусом та нагрівачем. Для створення математичної моделі запишемо рівняння теплопередачі, а також граничні і початкові умови окремо для шнека, повітря і корпусу апарата. В рамках даної роботи було створено як двовимірну, так і тривимірну модель, тому в подальшому буде приведено рівняння для обох випадків.

Рівняння теплопередачі у загальному вигляді представляється таким рівнянням [5]:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla(-k \nabla T) = 0,$$

де  $\rho$  – густина матеріалу (кг/м<sup>3</sup>);

$C_p$  – теплоємність матеріалу (Дж/кг·К);

$k$  – коефіцієнт теплопровідності (Вт/м·К);

$T$  – температура (К);

$t$  – час (с).

Таблиця 1

## Геометричні розміри і фізичні параметри апарата

Діаметр шнека	0,063 м
Довжина екструдера	1,26 м
Внутрішній діаметр циліндра	0,076 м
Зовнішній діаметр циліндра	0,08 м
Щільність корпусу та шнека	7700 кг/м <sup>3</sup>
Питома теплоємність корпусу та шнека	500 Дж/кг·К
Коефіцієнт теплопровідності корпусу та шнека	47 Вт/м·К
Діаметр кільцевого нагрівача	0,08
Висота кільцевого нагрівача	0,001
Довжина кільцевого нагрівача	0,4
Потужність кільцевого нагрівача	500 Вт
Питома потужність кільцевого нагрівача	5 Вт/см <sup>2</sup>
Напруга кільцевого нагрівача	230 В

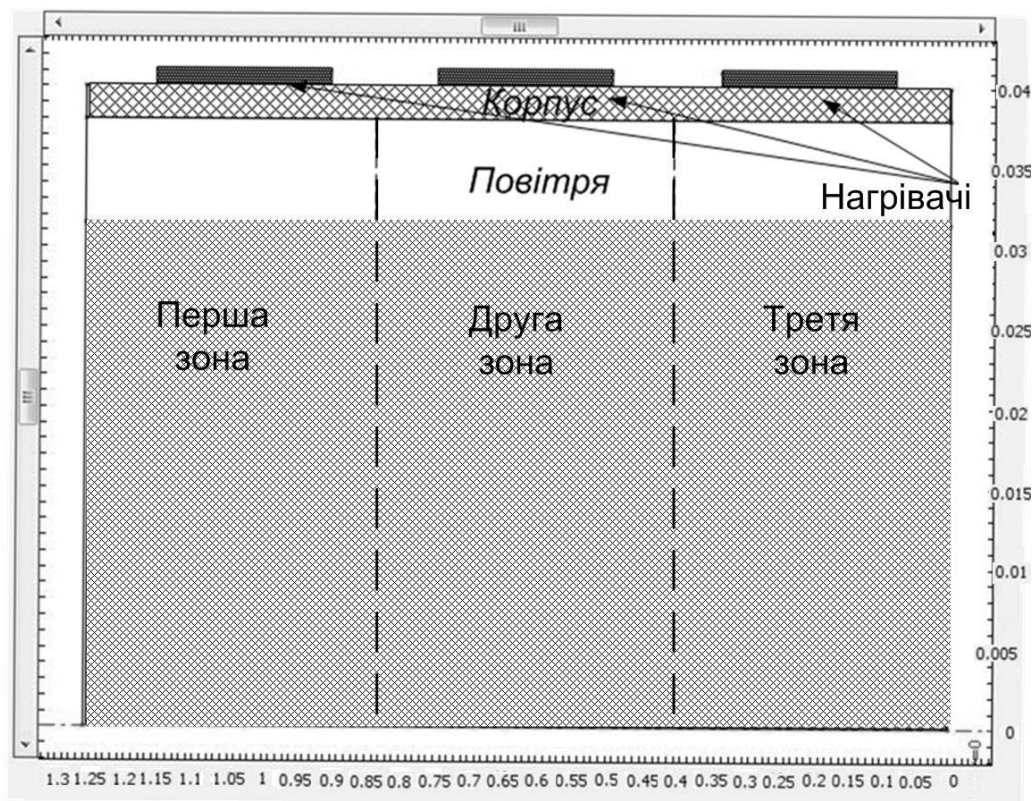


Рис. 1. Схема екструдера як об'єкта моделювання

Дану формулу можна представити у такому вигляді:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \quad (1)$$

де  $x, y, z$  – координата по ширині, довжині і висоті.

У випадку двовимірної моделі координата  $z$  не враховується, адже вважається, що температура розподілена лише по довжині і радіусу.

В цьому випадку рівняння набуває такого вигляду:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right). \quad (2)$$

#### Математична модель режиму розігріву одночерв'ячного екструдера

Розглянемо шнек екструдера. Підставляємо числові значення для шнека з табл.1 і отримуємо наступне рівняння:

$$7700 \cdot 500 \frac{\partial T_1}{\partial t} = 47 \left( \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} \right),$$

де  $T_1$  – температура шнека (К).

Або для двовимірної моделі:

$$7700 \cdot 500 \frac{\partial T_1}{\partial t} = 47 \left( \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} \right).$$

Вважаємо, що температура шнека в початковий момент часу дорівнювала 20°C, або 293 К.

Отже, початкову умову для шнека можна записати так:

$$T_{inf} = 293 \text{ (К)}.$$

Граничну умову на межі шнек – повітря визначаємо як умову третього роду:

$$q(T) = h(T_1 - T_{inf}), \quad (3)$$

де  $q(T)$  – тепловий потік через границю;

$T_{inf}$  – температура навколишнього середовища (К);

$h$  – коефіцієнт тепловіддачі від повітря до шнека (Вт/м²\*К).

Коефіцієнт  $h$  не є сталим, а є функцією температури. Виведемо цю функціональну залежність. На зовнішній поверхні екструдера присутня так звана природна конвекція для корпусу. В цьому випадку для визначення коефіцієнта тепловіддачі виразимо його через критерії Нуссельта, Грасгофа і Прандтля [6]:

$$Nu = C(Gr \cdot Pr)^n, \quad (4)$$

де  $Nu$  – критерій Нуссельта;

$Gr$  – критерій Грасгофа;

$Pr$  – критерій Прандтля;

$C, n$  – константи, що залежать від форми тіла.

Вважаємо корпус екструдера горизонтально покладеним циліндром, тоді ці константи  $C$  і  $n$  матимуть відповідно наступні значення: 0,47; 0,25 [6].

Розпишемо критерій Нуссельта:

$$Nu = \frac{h \cdot X}{\gamma}, \quad (5)$$

де  $h$  – коефіцієнт тепловіддачі  $\left( \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}} \right)$ ;

$X$  – зовнішній діаметр корпусу екструдера (м);

$\gamma$  – коефіцієнт теплопровідності  $\left( \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}} \right)$ .

Розпишемо критерій Грасгофа:

$$Gr = \frac{g \cdot \beta \cdot \rho^2 \cdot \Delta t \cdot X^3}{\mu^2}, \quad (6)$$

де  $g$  – прискорення сили тяжіння  $9,81 \left( \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \right)$ ;

$\beta$  – температурний коефіцієнт розширення газів (1/К);

$\rho$  – густина газу  $\left(\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\right)$ ;

$\Delta t = (T_1 - T_{inf})$ ;

де  $T$  – температура корпусу;

$T_{inf}$  – температура навколишнього повітря;

$\mu$  – динамічна в'язкість  $\left(\frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}^2}\right)$ .

Розпишемо критерій Прандтля:

$$Pr = \frac{\mu \cdot Cp}{\gamma}, \quad (7)$$

де  $Cp$  – питома теплоємність рідини  $\left(\frac{\text{Дж} \cdot \text{кг}}{\text{К}}\right)$ .

Підставляємо рівняння (5), (6), (7) в рівняння (4) і виражаємо коефіцієнт тепловіддачі  $h$  :

$$h = \frac{\gamma \cdot C}{D} \left( \frac{g \cdot \beta \cdot \rho^2 \cdot \Delta t \cdot X^3}{\mu^2} \cdot \frac{\mu \cdot Cp}{\gamma} \right)^n. \quad (8)$$

Таким чином, отримано функціональну залежність коефіцієнта тепловіддачі, яку підставляємо у рівняння граничної умови (3) і отримуємо:

$$q(T) = \frac{\gamma \cdot C}{D} \left( \frac{g \cdot \beta \cdot \rho^2 \cdot \Delta t \cdot X^3}{\mu^2} \cdot \frac{\mu \cdot Cp}{\gamma} \right)^n (T_{inf} - T_1). \quad (9)$$

Розглянемо рівняння для повітря, що знаходиться між шнеком та корпусом екструдера. Рівняння теплопередачі для повітря має аналогічний до (1) вигляд. Проте на відміну від шнека, для якого густина, теплоємність і теплопровідність бралися сталі, у випадку з повітрям ці коефіцієнти є розрахунковими величинами, що залежать від температури. Наведемо функціональні залежності [6], що використовувалися при розв'язку системи рівнянь.

$$\rho = \frac{P}{287,4 \cdot T_2},$$

де  $P$  – тиск повітря, приймемо рівним атмосферному  $10^5$  (Па);

$T_2$  – температура повітря (К).

Теплоємність повітря:

$$Cp = (1,005 + 1,1904 \cdot 10^{-4} \cdot (T_2 - 273)) \cdot 10^3.$$

Коефіцієнт теплопровідності:

$$k = 2,44 \cdot 10^{-2} \left( \frac{T_2}{273} \right)^{0,82}$$

Замість значень густини, теплоємності і теплопровідності підставляємо їх функціональні залежності у рівняння теплопередачі і отримуємо для тривимірної моделі:

$$\frac{P}{287,4 \cdot T_2} (1,005 + 1,1904 \cdot 10^{-4} \cdot (T_2 - 273)) \cdot 10^3 \frac{\partial T_2}{\partial t} = 2,44 \cdot 10^{-2} \left( \frac{T_2}{273} \right)^{0,82} \left( \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} \right),$$

і для двовимірної моделі:

$$\frac{P}{287,4 \cdot T_2} (1,005 + 1,1904 \cdot 10^{-4} \cdot (T_2 - 273)) \cdot 10^3 \frac{\partial T_2}{\partial t} = 2,44 \cdot 10^{-2} \left( \frac{T_2}{273} \right)^{0,82} \left( \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2} \right).$$

Початковою умовою для повітря також будемо вважати температуру  $20^\circ\text{C}$  або  $293\text{ K}$ .

Отже,  $T_{inf\_p} = 293$  (К).

Тут  $T_{inf\_p}$  – початкова температура прошарку повітря.

Гранична умова на межі шнек-повітря описана вище. Що стосується умови корпус-повітря, то за таких умов вона матиме аналогічний (9) вигляд:

$$q(T) = \frac{\gamma \cdot C}{D} \left( \frac{g \cdot \beta \cdot \rho^2 \cdot \Delta t \cdot X^3}{\mu^2} \cdot \frac{\mu \cdot Cp}{\gamma} \right)^n (T_{inf\_p} - T_2),$$

де  $q(T)$  – тепловий потік через границю.

Розглянемо корпус і нагрівачі екструдера. Вважатимемо, що корпус і нагрівачі екструдера виготовлені з того ж самого матеріалу, що і шнек, тому рівняння теплопередачі для цих ємностей є аналогічними (1). За початкові умови для корпусу і нагрівачів, як і в попередніх випадках, приймемо температуру 20°C або 293К.

Граничні умови на межах корпус - навколишнє середовище і нагрівачі – навколишнє середовище будуть третього роду (9). Гранична умова на межі нагрівачі – корпус буде другого роду і матиме наступний вигляд:

$$q(T) = q_0,$$

де  $q(T)$  - тепловий потік через границю;

$q_0$  - тепловий потік через одиницю поверхні (Вт/м<sup>3</sup>).

Вважаємо, що втрат тепла з боків апарата немає, тому граничними умовами для цих ділянок екструдера будуть умови термічної ізоляції. Тобто тепловий потік через ці границі дорівнює нулю:

$$q(T) = 0.$$

Розглянувши вищенаведені рівняння теплопередачі, а також граничні і початкові умови, можемо скласти систему рівнянь, що описує температурний режим екструдера під час його розігріву. Система рівнянь має наступний вигляд для тривимірної моделі:

$$\left\{ \begin{array}{l} 7700 \cdot 500 \frac{\partial T_1}{\partial t} = 47 \left( \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} \right) \\ q(T) = \frac{\gamma \cdot C}{D} \left( \frac{g \cdot \beta \cdot \rho^2 \cdot \Delta t \cdot X^3}{\mu^2} \cdot \frac{\mu \cdot Cp}{\gamma} \right)^n (T_{inf} - T_1) \\ T_{inf} = 293 \\ \frac{P}{287,4 \cdot T_2} (1,005 + 1,1904 \cdot 10^{-4} \cdot (T_2 - 273)) \cdot 10^3 \frac{\partial T_2}{\partial t} = 2,44 \cdot 10^{-2} \left( \frac{T_2}{273} \right)^{0,82} \left( \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} \right) \\ q(T) = \frac{\gamma \cdot C}{D} \left( \frac{g \cdot \beta \cdot \rho^2 \cdot \Delta t \cdot X^3}{\mu^2} \cdot \frac{\mu \cdot Cp}{\gamma} \right)^n (T_{inf\_p} - T_2) \\ T_{inf\_p} = 293 \\ 7700 \cdot 500 \frac{\partial T_3}{\partial t} = 47 \left( \frac{\partial^2 T_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_3}{\partial z^2} \right) \\ T_{inf\_k} = 293 \\ q(T) = q_0 \\ q(T) = \frac{\gamma \cdot C}{D} \left( \frac{g \cdot \beta \cdot \rho^2 \cdot \Delta t \cdot X^3}{\mu^2} \cdot \frac{\mu \cdot Cp}{\gamma} \right)^n (T_{inf_k} - T_3) \\ 7700 \cdot 500 \frac{\partial T_4}{\partial t} = 47 \left( \frac{\partial^2 T_4}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_4}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_4}{\partial z^2} \right) \\ T_{inf\_n} = 293 \\ q(T) = \frac{\gamma \cdot C}{D} \left( \frac{g \cdot \beta \cdot \rho^2 \cdot \Delta t \cdot X^3}{\mu^2} \cdot \frac{\mu \cdot Cp}{\gamma} \right)^n (T_{inf\_n} - T_4) \end{array} \right.$$

де  $T_1$  – температура шнека;  
 $T_2$  – температура повітря;  
 $T_3$  – температура корпусу;  
 $T_4$  – температура нагрівачів.

Для двовимірної моделі:

$$\begin{aligned}
 & 7700 \cdot 500 \frac{\partial T_1}{\partial t} = 47 \left( \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} \right) \\
 & q(T) = \frac{\gamma \cdot C}{D} \left( \frac{g \cdot \beta \cdot \rho^2 \cdot \Delta t \cdot X^3}{\mu^2} \cdot \frac{\mu \cdot Cp}{\gamma} \right)^n (T_{inf} - T_1) \\
 & \quad T_{inf} = 293 \\
 & \frac{P}{287,4 \cdot T_2} (1,005 + 1,1904 \cdot 10^{-4} \cdot (T_2 - 273)) \cdot 10^3 \frac{\partial T_2}{\partial t} = 2,44 \cdot 10^{-2} \left( \frac{T_2}{273} \right)^{0,82} \left( \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2} \right) \\
 & q(T) = \frac{\gamma \cdot C}{D} \left( \frac{g \cdot \beta \cdot \rho^2 \cdot \Delta t \cdot X^3}{\mu^2} \cdot \frac{\mu \cdot Cp}{\gamma} \right)^n (T_{inf\_p} - T_2) \\
 & \quad T_{inf\_p} = 293 \\
 & 7700 \cdot 500 \frac{\partial T_3}{\partial t} = 47 \left( \frac{\partial^2 T_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_3}{\partial y^2} \right) \\
 & \quad T_{inf\_k} = 293 \\
 & q(T) = q_0 \\
 & q(T) = \frac{\gamma \cdot C}{D} \left( \frac{g \cdot \beta \cdot \rho^2 \cdot \Delta t \cdot X^3}{\mu^2} \cdot \frac{\mu \cdot Cp}{\gamma} \right)^n (T_{inf_k} - T_3) \\
 & 7700 \cdot 500 \frac{\partial T_4}{\partial t} = 47 \left( \frac{\partial^2 T_4}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_4}{\partial y^2} \right) \\
 & \quad T_{inf\_n} = 293 \\
 & q(T) = \frac{\gamma \cdot C}{D} \left( \frac{g \cdot \beta \cdot \rho^2 \cdot \Delta t \cdot X^3}{\mu^2} \cdot \frac{\mu \cdot Cp}{\gamma} \right)^n (T_{inf\_n} - T_4)
 \end{aligned}$$

Обидві системи можна розв'язати за допомогою методу скінченних елементів, що використовується в програмному пакеті *Comsol Multiphysics* [7]. Для цього слід створити геометрію екструдера, яку показано на рис. 1, і передати кожній ємності відповідне рівняння теплопередачі, а також її граничні і початкові умови.

### Висновки

На основі розробленої схеми екструдера як об'єкта математичного моделювання побудована математична модель режиму розігріву одночерв'ячного екструдера. Ця модель має універсальний характер і може бути використана в екструдерах різної геометрії. За допомогою програмного засобу *Comsol Multiphysics* може бути отриманий розв'язок представленої системи рівнянь, що дозволить прослідкувати розподіл температур в усьому об'ємі апарату.

Остання задача і має бути предметом подальшого дослідження.

### Література

1. Д.Д. Рябинин, Ю.Е. Лукач. Червячные машины для переработки пластических масс и смесей. - М.: Машиностроение, 1965. - 326с.
2. Э. Фишер. Экструзия пластических масс. - М.: Химия, 1970. - 284с.
3. В.П. Володин. Экструзия профильных изделий из термопластов. СПб.: Профессия, 2005. - 480 с., ил., табл., схемы.
4. Жученко А.И. Кубрак А.И. Динамика объектов с распределенными параметрами. - К.: НТУУ "КПИ", 2006. - 151 с.
5. Roger W. Pryor, PhD. Multiphysics Modeling Using COMSOL®: A First Principle Approach. Jones & Bartlett, 2011. - 852 p.
6. М.А. Михеев, И.М. Михеева. Основы теплопередачи. - М., «Энергия», 1977. — 344 с.
7. Lennart Edsberg. Introduction to Computation and Modeling with Differential Equations. 2008. - 256 p.