

## АНАЛІТИЧНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ПОШКОДЖЕНОЇ ТЕПЛОВОЇ ІЗОЛЯЦІЇ ТРУБОПРОВОДІВ

Для систем теплопостачання України актуальною проблемою є визначення та прогнозування втрат теплової енергії при транспортуванні теплоносія. Теплотраси теплових мереж мають велику довжину та їх ізоляція пошкоджена. Встановлення приладів обліку теплової енергії на всіх джерелах та у всіх споживачів (тобто будівель) без винятку дозволяє визначити та прогнозувати реальні теплові втрати у тепловій мережі, але це є складною задачею, не всі споживачі і джерела реально охоплені обліком витрати тепла. Задача визначення теплових втрат є також актуальною для систем енергоменеджменту систем теплопостачання, підприємств енергетики та промисловості. Розв'язання задачі пропонується окремим математичним моделюванням температурного стану ділянки пошкодженого ізоляційного шару з визначенням теплового потоку через нього. Вирішення задачі запропоновано зробити методом аналітичного розв'язання диференціального рівняння теплопровідності з граничними умовами третього роду. При рівномірному розподілі характерних пошкоджень за загальною довжиною трубопроводу знаючи межі впливу пошкодження, частку пошкодження ізоляції та кількість пошкоджень на трубопроводі можна визначити реальний тепловий потік із зовнішньої поверхні трубопроводів у т.ч. коефіцієнт збільшення теплових втрат на ділянці теплотраси по відношенню до тих, що визначені нормативними документами. Традиційно здебільшого розглядаються одновимірні моделі або визначення двовимірного температурного поля та фактичних теплових потоків у поперечному перерізі до осі характерної пошкодженої ділянки ізоляції. Але при цьому не враховується двовимірність температурного поля пошкодженого шару ізоляції по довжині (тобто вздовж осі) трубопроводу. Тому метою даної роботи є розробка методики визначення теплових втрат трубопроводами з урахуванням пошкодження їх ізоляції та розподілу характерних пошкоджень за довжиною. Проведено таке моделювання для однієї з ділянок. Також проведені експериментальні та чисельні дослідження методом кінцевих різниць в комбінації з методом прогонки змінних напрямлень для аналогічних моделей підтвердили збіг аналітичного рішення запропонованої моделі та кінцеворізницевої моделі у межах допустимої погрішності.

**Ключові слова:** системи енергетичного менеджменту, теплопостачання, трубопровід, тепла ізоляція, пошкодження, транспортування теплоти, втрати теплоти, математичне моделювання, аналітичне розв'язання

### Вступ

Однією з характерних проблем у системах теплопостачання України є визначення та прогнозування втрат теплової енергії при транспортуванні теплоносія. Більшість трубопроводів теплових мереж та їх ізоляція у багатьох населених пунктах України пошкоджена (див. рис.1). Довжина ділянок теплотрас і магістралей великого діаметра є значною і може досягати 10 км і більше. Без встановлення приладів обліку теплової енергії на всіх джерелах та у всіх споживачів (тобто будівель) без винятку визначити та прогнозувати реальні теплові втрати у тепловій мережі є складною задачею. Ця задача є також актуальною для систем енергоменеджменту систем теплопостачання, підприємств енергетики та промисловості.

### Аналіз стану дослідження

Активно займались визначенням теплових втрат з урахуванням фізичного зношування теплоізоляційної конструкції вчені Кузнєцов, Половников та ін. Вони акцентують увагу на врахуванні неоднорідності теплоізоляції та її пошкодження, факторів експлуатації, зволоження та деформації шару ізоляції. У їх роботах здебільшого розглядаються одновимірні моделі або визначення двовимірного температурного поля та фактичних теплових потоків у поперечному перерізі до осі характерної пошкодженої ділянки ізоляції. Але при цьому не враховується двовимірність температурного поля пошкодженого шару ізоляції по довжині (тобто вздовж осі) трубопроводу. Тому метою даної роботи є розробка методики визначення теплових втрат трубопроводами з урахуванням пошкодження їх ізоляції та розподілу характерних пошкоджень за довжиною. Характер пошкодження теплової ізоляції можна визначити під час проведення натурних обстежень трубопроводів (особливо теплотрас, прокладених на свіжому повітрі). Отже можна побудувати геометричну модель ділянки з характерним для цієї мережі ізоляції. Для розв'язання задачі проводиться окреме математичне моделювання температурного стану

ділянки пошкодженого ізоляційного шару з визначенням теплового потоку через нього. Вирішення задачі запропоновано зробити методом аналітичного розв'язання диференціального рівняння теплопровідності з граничними умовами третього роду. Далі знаходяться коефіцієнти збільшення теплового потоку по відношенню до вихідної непошкодженої ділянки. При рівномірному розподілі характерних пошкоджень за загальною довжиною трубопроводу знаючи межі впливу пошкодження, частку пошкодження ізоляції та кількість пошкоджень на трубопроводі можна визначити реальний тепловий потік із зовнішньої поверхні трубопроводів у т.ч. та коефіцієнт збільшення теплових втрат на ділянці теплотраси по відношенню до тих, що визначені нормативними документами [1, 2 та ін.] в залежності від року побудови.

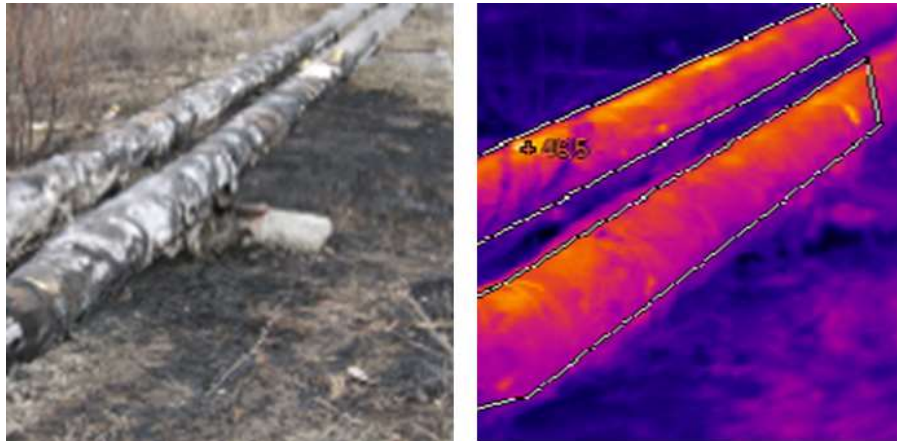


Рисунок 1 - Фактичний стан ізоляції трубопроводів теплотраси та термограма

#### Ціль і завдання дослідження

Виходячи з вищевикладеного, основні завдання цієї роботи: аналітичне розв'язання математичної моделі з метою визначення фактичних теплових втрат характерних пошкоджених ділянок. Далі математичне моделювання теплового стану для виявлення характеристик списку характерних ушкоджень ізоляції (теплові потоки та коефіцієнти їх збільшення, зони впливу ушкодження) для різних типорозмірів труб. Ці дані будуть використовуватися для визначення, прогнозування та експертної оцінки теплових втрат ділянок теплотрас, що зазнали натурального обстеження та огляду.

#### Матеріал і результати дослідження

Математична модель та методика розрахунку представлені нижче. На рис. 2. наведено характерну схему пошкодженої ділянки. Для цієї схеми вирішується двовимірний крайовий задаче знаходження поля температур  $t$  у шарі та на поверхні ділянки труби з пошкодженою ізоляцією з граничними умовами 3 роду та диференціальним рівнянням теплопровідності в циліндричних координатах (за умови сталості теплофізичних властивостей шару ізоляції та заміни  $v = t - t_0$ ):

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0. \quad (1)$$

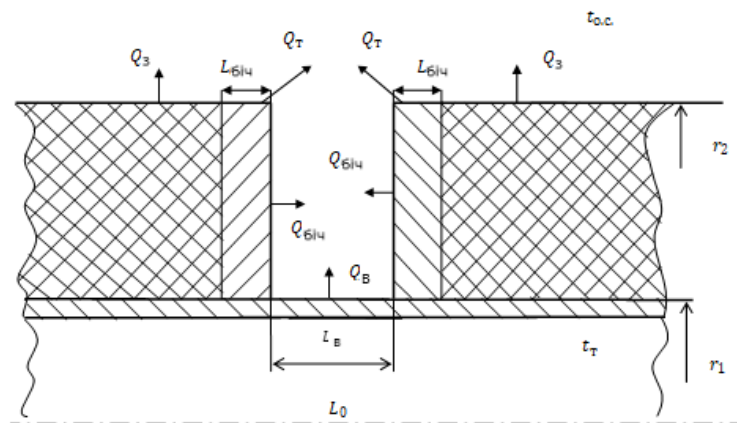


Рисунок 2 - Модель трубопроводу з ділянкою пошкодження ізоляції

Граничні умови записуємо у вигляді (див. позначення на рис.2):

а) зовні труби на шарі ізоляції ( $r = r_2$ )

$$-\lambda \frac{\partial v}{\partial r} - \alpha_3 v = 0; \quad (2)$$

б) зовні труби на поглибленні шару пошкодженої ізоляції або оголеної труби ( $r = r_c$ )

$$-\lambda \frac{\partial v}{\partial r} - \alpha_B v = 0; \quad (3)$$

в) зовні труби на бічному зрізі пошкодженої ізоляції ( $x = 0$ )

$$\lambda \frac{\partial v}{\partial x} - \alpha_6 v = 0; \quad (4)$$

г) усередині труби з урахуванням термічного опору стінки труби ( $r = r_1$ )

$$-\lambda \frac{\partial v}{\partial r} + \alpha_T v = \alpha_T \cdot (t_T - t_{0.c.}), \quad (5)$$

де  $\alpha_3$ ,  $\alpha_B$ ,  $\alpha_6$  та  $\alpha_T$  – коефіцієнти тепловіддачі до повітря зовні шару ізоляції, поглиблення пошкодження ізоляції (вільній ділянці), на бічному зрізі та від води всередині труби (еквівалентний з урахуванням термічного опору стінки).

$t_T$  – температура теплоносія, °C;  $t_{0.c.}$  – температура зовнішнього середовища, °C.

Гранична умова теплообміну всередині труби (5) є неоднорідною, а решта – однорідною.

Запропоновано рішення шукати аналітичним шляхом у вигляді суми частинних аналітичних рішень із урахуванням граничних умов. Представляючи загальне розв'язання даного рівняння у вигляді частинних рішень [3] з урахуванням вагових коефіцієнтів та підставляючи у граничні умови отримаємо:

$$v = \sum_{k=1}^n a_k \cdot v_k, \quad v_k = \left( c_k \cdot I_0 \left( \frac{k \cdot \pi}{l} \cdot r \right) + K_0 \left( \frac{k \cdot \pi}{l} \cdot r \right) \right) \cdot \left( \sin \left( \frac{k \cdot \pi}{l} \cdot x \right) + b_k \cdot \cos \left( \frac{k \cdot \pi}{l} \cdot x \right) \right), \quad (6)$$

де  $k$  – поточний індекс (ціле позитивне число);  $n$  – кількість частинних рішень (тобто членів нескінченного ряду, що визначається збіжністю);  $a_k$  – ваговий коефіцієнт рішення;  $b_k$  та  $c_k$  – коефіцієнти, що виходять з граничних умов (4) та (2);  $I_0$  та  $K_0$  – модифіковані функції Бесселя (першого роду) та Неймана (другого роду, або Макдональда), тобто від уявного аргументу та нульового порядку [4, 5];  $l$  – довжина ділянки розкладання рішення.

Щоб отримати вагові коефіцієнти  $a_k$  використовується гранична умова (5) та запропоновано розкладання її правої частини до ряду Фур'є. Якщо права частина граничної умови не залежить від координати  $x$  (є постійною величиною (const), то запропоновано використовувати розкладення [4, 5]

$$\text{const} = \text{const} \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin((2 \cdot m + 1) \cdot x)}{2 \cdot m + 1}, \quad (7)$$

де  $m$  – поточний індекс (ціле позитивне число).

Приймаючи  $k=2m+1$  у формулі (6) та враховуючи, що з граничної умови (4) коефіцієнт  $b_k = \frac{\lambda}{\alpha_6} \cdot \frac{k \cdot \pi}{l}$

та  $\frac{d}{dx} \left[ \text{const} \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin((2 \cdot m + 1) \cdot x)}{2 \cdot m + 1} \right] = \text{const} \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \cos((2 \cdot m + 1) \cdot x) = 0$  розклад правої частини граничної

умови (5) можна записати

$$\alpha_T \cdot (t_T - t_{0.c.}) = \alpha_T \cdot (t_T - t_{0.c.}) \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left( \sin \left( \frac{k \cdot \pi}{l} \cdot x \right) + b_k \cdot \cos \left( \frac{k \cdot \pi}{l} \cdot x \right) \right), \quad (8)$$

де  $k=2m+1$ . Ця умова також стосується рівняння (6).

У такий спосіб можна розкласти праву частину граничної умови (5) якщо вона є не тільки константою, але відомою функцією, яка розкладається у ряд Фур'є. У нашому випадку витрата води усередині труби є такою, що в межах ділянки, що розглядається, температура води практично не змінюється.

На рис. 3 наведено приклад розв'язання задачі знаходження поля температур для ділянки трубопроводу  $\varnothing 159$  мм та товщиною шару ізоляції  $\delta=60$  мм. (на довжині від вільної ділянки). Температура оточуючого повітря  $0,2^\circ\text{C}$ , теплоносія –  $60^\circ\text{C}$ . Як видно із рис. 3 поле температур у зоні ушкодження неоднорідне. Вплив пошкодження поширюється на довжину  $\approx 0,32$  м від ушкодження. Поза цією

довжиною поле температур є одномірним і можна вважати теплопередачу як для неушкодженої ізоляції. Подібні дослідження були проведені за різних граничних умов та інших діаметрів трубопроводу.

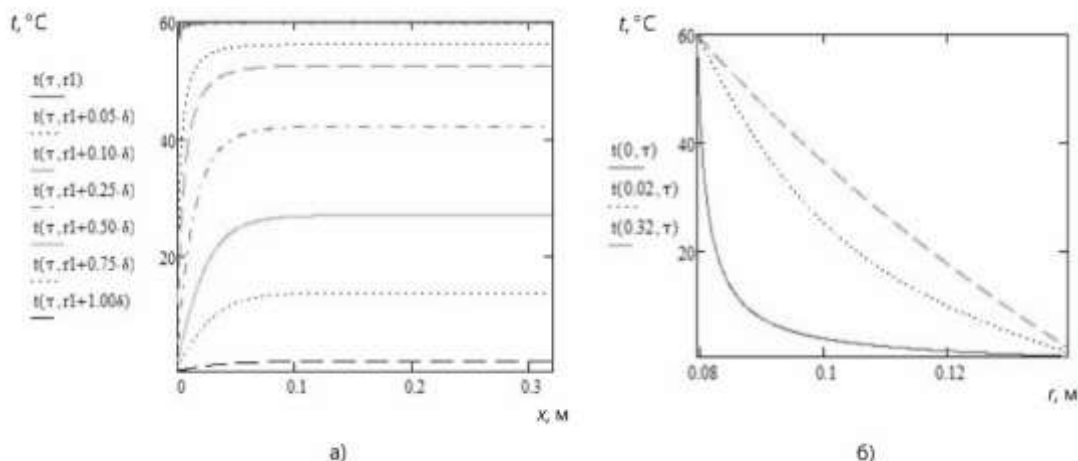


Рисунок 3 - Приклад поля температур шару ізоляції у розрізі пошкодженої ділянки  
а) - по довжині труби на різних радіусах; б) – за радіусом на різній довжині

При проведенні математичного моделювання знайдено зону впливу пошкодження та теплопередачі через бічні поверхні пошкодженого ізоляційного шару труби на тепловий потік  $L_{\text{біч}}$  (див. рис. 2). Встановлено, що при діаметрах труб від 32 мм до 273 мм і стандартних товщинах ізоляції 40 мм з мінеральної вати ця зона впливу складала 0,2 м в обидва боки від пошкодження, і 0,32 м при товщині ізоляції 60 мм. Виявлено, що ці значення не залежать від температурних та граничних умов.

Для пошуку результуючого теплового потоку з ділянки трубопроводу з пошкодженою ізоляцією (рис. 2) також використовується математичне моделювання. Теплові потоки з поверхонь пошкодження визначаються шляхом інтегрування рішення (6) на межах ділянки:

$Q_T$  – тепловий потік з "горцевої" частини на довжині впливу пошкодження, Вт

$$Q_T = 2\pi r_2 \int_0^{L_{\text{біч}}} \alpha_3 dx; \quad (9)$$

$Q_6$  – тепловий потік з "бічних" поверхонь у розрізі пошкодження, Вт

$$Q_6 = \int_{r_1}^{r_2} 2\pi r \alpha_6 dr. \quad (10)$$

Крім того розраховуються:

$Q_B$  – тепловий потік з вільної ділянки труби з урахуванням граничних умов (3) та (5), Вт

$$Q_B = k_B (t_T - t_{\text{о.с.}}) L_B; \quad (11)$$

$Q_{H0}$  – нормативний тепловий потік, визначений за нормами густини теплового потоку  $q_{H0}$  [1, 2] з урахуванням різниці температур теплоносія та навколишнього середовища

$$Q_{H0} = q_{H0} L_0; \quad (12)$$

$Q_H$  – тепловий потік при заданій нормативній товщині ізоляції  $\delta=40$  мм. або  $\delta=60$  мм [2] (тобто з непошкоджених ділянок)

$$Q_H = q_H L_H, \quad (13)$$

де  $L_0$  – повна довжина ділянки трубопроводу, що розглядається, м;  $L_B$  – ділянка оголеної вільної труби, м;  $L_H$  – довжина ділянки трубопроводу без вільної труби та зон впливу пошкодження, м;  $q_H$  – лінійний тепловий потік з непошкодженої ділянки, Вт/м,  $q_H = k_H (t_T - t_{\text{о.с.}})$ ;  $k_B$  та  $k_H$  – лінійні коефіцієнти теплопередачі через вільну ділянку та через непошкоджену ділянку (з повним шаром ізоляції).

У результаті фактичні теплові втрати пошкодженої ділянки трубопроводу

$$Q_{\Phi} = Q_C + Q_T + Q_{\text{біч}}. \quad (14)$$

Сумарні теплові втрати з ділянки трубопроводу

$$Q_{\Sigma} = \sum Q_H + \sum Q_B + \sum Q_T + \sum Q_{\text{біч}}. \quad (15)$$

У розробленій методиці розраховуються необхідні коефіцієнти:

а) збільшення теплового потоку з вільної ділянки трубопроводу

$$K_{LB} = \frac{q_B}{q_H} = \frac{k_B(t_T - t_{o.c})}{k_H(t_T - t_{o.c})} = \frac{k_B}{k_H}; \quad (16)$$

б) збільшення теплового потоку на ділянці впливу ушкодження

$$K_{\text{біч}} = \frac{Q_T + Q_{\text{біч}}}{q_H L_{\text{біч}}}, \quad (17)$$

де  $L_{\text{біч}}$  – зона впливу ділянки пошкодження, м;

в) коефіцієнт збільшення (зменшення) нормативного теплового потоку при заданій товщині шару ізоляції

$$K_{\delta} = \frac{q_H}{q_{H0}}. \quad (18)$$

Результуючий коефіцієнт збільшення теплового потоку для трубопроводу теплотраси в порівнянні з нормативним:

$$K_{\text{із.н.}} = \frac{Q_{\Sigma}}{q_H L_0} = 1 + \Delta_{\text{ушк.}} \cdot n_{\text{ушк.}} (K_{LB} - 1) + n_{\text{ушк.}} (K_{\text{біч}} - 1) \frac{L_{\text{біч}}}{L_0}, \quad (19)$$

де  $\Delta_{\text{ушк.}}$  – частка ушкодження,  $\Delta_{\text{ушк.}} = \frac{L_B}{L_B + 2 \cdot L_{\text{біч}}}$ ;  $n_{\text{ушк.}}$  – кількість ушкоджень.

Якщо необхідно розрахувати результуючий коефіцієнт збільшення теплового потоку для трубопроводу теплотраси по відношенню до нормативного теплового потоку, визначеного за нормами щільності з урахуванням температурних умов роботи мережі,  $K_{\text{із.н.}}$  необхідно помножити ще й на  $K_{\delta}$ .

Як приклад розглянуто модельне завдання на ділянці трубопроводу, що подає  $\varnothing 159$  мм та товщиною шару ізоляції  $\delta=60$  мм. Розподіл температур в інтервалі м для одного пошкодження на цій ділянці наведено на рис.3. Під час обстеження виявлено, що частка ушкодження ізоляції трубопроводу становила  $\Delta_{\text{ушк.}}=0,2$ , кількість пошкоджень на загальній довжині  $n_{\text{ушк.}}=10$ . В результаті математичного моделювання розраховано необхідні коефіцієнти:  $K_{LB}=19,837$ ,  $K_{\text{біч}}=1,261$ ,  $K_{\delta}=0,903$ . Результуючий коефіцієнт збільшення нормативного теплового потоку (19) для даних температурних умов роботи (тобто з урахуванням  $K_{\delta}$ ) склав 4,318.

Проведені експериментальні та чисельні дослідження методом кінцевих різниць в комбінації з методом прогонки змінних напрямлень [6] для аналогічних моделей підтвердили збіг аналітичного рішення запропонованої моделі та кінцеворізничевої моделі [7] у межах допустимої погрешності.

### Висновки

Розроблені математичні моделі та методи дозволяють оцінити та прогнозувати реальні теплові втрати через ізоляцію трубопроводів при передачі теплоносія з урахуванням фактичного стану ізоляції під час експлуатації трубопроводів теплових мереж. Їх досить легко використовувати для інших умов роботи мережі, дослідити вплив найвагоміших факторів на теплові втрати, а також для вибору раціональних параметрів роботи теплової мережі та нормування теплових втрат.

### Список використаної літератури

1. Методические указания по определению тепловых потерь в водяных и паровых тепловых сетях: РД 34.09.255 (МУ 34-70-080-84) – М. : – Союзтехэнерго. – 1985. – 72 с.
2. Тепловая изоляция оборудования и трубопроводов: : СНиП 2.04.14-88. – Официальное издание. – М. : Госстрой СССР, 1989.
3. Корн Г. Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн ; под общ. ред. И. Г. Арамановича. – М. : Наука, 1978. – 832 с.
4. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. — изд. 13-е. — М. : Наука, 1986. — 544 с.
5. И.С. Градштейн, И.М.Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — изд. 4-е перераб. — М. : Физматгиз, 1963. — 1100 с.
6. Самарский А. А. Теория разностных схем / Самарский А. А. – М.: Наука, 1989. – 616 с.

7. Підкопай В. М. Математичне моделювання та ідентифікація фактичних теплових втрат через пошкоджену ізоляцію трубопроводів теплотрас / В. М. Підкопай, А. М. Ганжа, Н. А. Марченко // Вісник Нац. техн. ун-ту "ХПІ": зб. наук. пр. Темат. вип. : Енергетичні та теплотехнічні процеси та устаткування. – Харків: НТУ "ХПІ", 2014. – № 12 (1055). – С. 83-89.

**A. Ganzha**<sup>1</sup>, Dr. Sc. (Eng.), Prof., ORCID 0000-0003-3967-2421

**V. Kornelyuk**<sup>1</sup>, ORCID 0000-0002-0212-1290

**N. Marchenko**<sup>1</sup>, Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Prof., ORCID 0000-0001-9889-3713

<sup>1</sup>National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute"

## **ANALYTICAL SOLUTION OF THE DIFFERENTIAL EQUATION OF HEAT CONDUCTIVITY FOR DAMAGED THERMAL INSULATION OF PIPELINES**

*For heat supply systems of Ukraine, the determination and forecasting of thermal energy losses during the transportation of heat carrier is an urgent problem. The thermal lines of the heating networks are long and its insulation is damaged. Installation of heat energy metering devices at all sources and all consumers (i.e. buildings) without exception allows determining and forecasting real heat losses in the heat network, but this is a difficult task, not all consumers and sources are actually covered by heat consumption accounting. The task of determining heat losses is also relevant for energy management systems of heat supply systems, energy companies and industry. The solution to the problem is proposed by a separate mathematical modeling of the temperature state of the section of the damaged insulating layer with the determination of the heat flow through it. It is proposed to solve the problem by the method of analytical solution of the differential equation of heat conduction with boundary conditions of the third kind. With the uniform distribution of characteristic damages along the total length of the pipeline, knowing the limits of damage influence, the share of insulation damage and the number of damages on the pipeline, it is possible to determine the real heat flow from the outer surface of the pipelines, including coefficient of increase of heat losses on the section of the heat pipe in relation to those determined by regulatory documents. Traditionally, one-dimensional models or determinations of the two-dimensional temperature field and actual heat fluxes in a cross-section to the axis of a characteristic damaged section of insulation are considered. But this does not take into account the two-dimensionality of the temperature field of the damaged layer of insulation along the length (that is, along the axis) of the pipeline. Therefore, the purpose of this work is to develop a methodology for determining heat losses through pipelines, taking into account the damage to their insulation and the distribution of characteristic damages along the length. The following simulation was carried out for one of the areas. Also, experimental and numerical studies using the finite difference method in combination with the method of running variable directions for similar models confirmed the coincidence of the analytical solution of the proposed model and the finite difference model within the permissible error.*

**Keywords:** energy management systems, heat supply, pipeline, thermal insulation, damage, heat transport, heat loss, mathematical modeling, analytical solution

### **References**

1. Metodicheskiye ukazaniya po izmereniyu teplovykh poter' v vodyanykh i parovykh teplovykh setyakh: RD 34.09.255 (MU 34-70-080-84) – М. : – Soyuztekhnenergo. – 1985. – 72 s.
2. Teplovaya izolyatsiya oborudovaniya i truboprovodov: SNIp 2.04.14-88. – Ofitsial'noye izdaniye. – М. : Gosstroy SSSR, 1989.
3. Korn G. Spravochnik po matematike / G. Korn, T. Korn ; pod obshch. red. I. G. Aramanovicha. – М. : Nauka, 1978. – 832 s.
4. Bronshteyn I. N., Semendyayev K. A. Spravochnik po matematike dlya inzhenerov i uchashchikhsya vtuzov. — izd. 13-ye. — М. : Nauka, 1986. — 544 s.
5. I.S. Gradshteyn, I.M.Ryzhik. Tablitsy integralov, summ, ryadov i proyavleniy. — izd. 4-ye pererab. — М. : Fizmatgiz, 1963. — 1100 s.
6. Samarskiy A. A. Teoriya raznostnykh skhem / Samarskiy A. A. – М.: Nauka, 1989. – 616 s.
7. Pidkopay V. M. Matematychnye modelyuvannya ta identyfikatsiya faktychnykh teplovykh vtrat cherez poshkodzhenu izolyatsiyu truboprovodiv teplotras / V. M. Pidkopay, O. M. Hanzha, N. O. Marchenko // Visnyk Nats. tekhn. un-tu "KHPI": zb. nauk. pr. Temat. vip. : Enerhetychni ta teplotekhnichni protsesy ta obladdannya. – Kharkiv: NTU "KHPI", 2014. – №12 (1055). – S. 83-89.

Надійшла: 09.11.2023

Received: 09.11.2023